Suites universelles

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2019

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Il vous a été donné un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

Soient $m = 2^{31} - 1 = 2\ 147\ 483\ 647$, $a = 46\ 613$ et $b = 17$. On définit la suite $u_i = au_{i-1} + b \bmod m$ pour tout $i \geq 1$, où u_0 est donné sur votre fiche.

Question 1 *Calculer* ***a)*** $u_1 \bmod 1000$ ***b)*** $u_{98} \bmod 1000$ ***c)*** $u_{9876} \bmod 1000$.

1 Suites universelles

On considère des suites d'entiers naturels non-nuls. Pour une suite $\ell = (a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$, on note $|\ell|$ sa <u>longueur</u>, ici égale à k. Les <u>préfixes</u> de ℓ sont les suites de la forme $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ pour $p \leq k$ et les <u>suffixes</u> de ℓ sont les suites de la forme $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_{k-1})$ pour $p \geq 0$.
Étant donnés n, k, α, on définit la suite

$$\mathcal{B}(n, k, \alpha) = (a_0, \dots, a_{k-1}) \text{ où } a_i = (u_{\alpha i} \bmod n) + 1.$$

Ici $x \bmod y$ désigne le reste de la division euclidienne de x par y.

La <u>capacité</u> d'une suite est la somme de ses éléments.

Question 2 *Calculer la capacité d'une suite ℓ.*
a) $\ell = \mathcal{B}(9, 5, 13)$
b) $\ell = \mathcal{B}(98, 54, 17)$
c) $\ell = \mathcal{B}(987, 543, 41)$
d) $\ell = \mathcal{B}(98765, 54321, 97)$

On dit qu'une suite $\ell_1 = (a_0, \dots, a_{k-1})$ <u>domine</u> une autre suite $\ell_2 = (b_0, \dots, b_{p-1})$ s'il existe

$$0 \leq i_0 < \dots < i_{p-1} \leq k - 1$$

tel que pour tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$, on a $b_j \leq a_{i_j}$.
Par exemple $(5, 3, 1, 10)$ domine $(4, 9)$ mais $(5, 3, 1, 10)$ ne domine pas $(6, 4)$.

Question 3 *Calculer pour un entier b et une liste $\ell = (a_0, \dots, a_{k-1})$ le premier indice i tel que $b \leq a_i$, et -1 s'il n'en existe pas.*
a) $b = 9$ $\quad \ell = \mathcal{B}(9, 5, 13)$
b) $b = 86$ $\quad \ell = \mathcal{B}(98, 54, 17)$
c) $b = 975$ $\quad \ell = \mathcal{B}(987, 543, 41)$
d) $b = 98123$ $\quad \ell = \mathcal{B}(98765, 54321, 97)$

Question 4 *Calculer pour une suite ℓ_1 et une suite ℓ_2 la longueur du plus grand préfixe ℓ_2' de ℓ_2 tel que ℓ_1 domine ℓ_2'.*
<u>Indication</u> : il existe un algorithme simple pour tester si ℓ_1 domine ℓ_2 en temps $O(|\ell_1| + |\ell_2|)$.
a) $\ell_1 = \mathcal{B}(9, 5, 13)$ $\quad \ell_2 = \mathcal{B}(9, 10, 14)$
b) $\ell_1 = \mathcal{B}(98, 54, 17)$ $\quad \ell_2 = \mathcal{B}(98, 68, 43)$
c) $\ell_1 = \mathcal{B}(987, 543, 41)$ $\quad \ell_2 = \mathcal{B}(987, 673, 174)$
d) $\ell_1 = \mathcal{B}(98765, 54321, 97)$ $\quad \ell_2 = \mathcal{B}(98765, 65431, 81)$.

Question à développer pendant l'oral 1 *Présenter votre algorithme et une preuve de correction <u>formelle</u>.*

Une suite ℓ est n-universelle si elle domine toute suite de capacité n. Par exemple, la suite $(1, 3, 1)$ est 3-universelle. En effet, voici toutes les suites de capacité 3 :

$$(1, 1, 1) \qquad (1, 2) \qquad (2, 1) \qquad (3)$$

Question à développer pendant l'oral 2 *La suite $(1, 2, 4, 3, 1)$ est-elle 4-universelle ? Existe t-il une suite 4-universelle de capacité plus petite ?*

Nous étudions la construction suivante : $L_0 = ()$, $L_1 = (1)$ et L_n est la suite obtenue en concaténant $L_{\lfloor n/2 \rfloor}$, puis (n), puis $L_{n-1-\lfloor n/2 \rfloor}$.
Par exemple $L_2 = (1, 2)$, $L_3 = (1, 3, 1)$, $L_4 = (1, 2, 4, 1)$, et $L_5 = (1, 2, 5, 1, 2)$.

Question à développer pendant l'oral 3 *Montrer que L_n est une suite n-universelle. Est-elle de capacité minimale ?*

Question 5 *Calculer la capacité de L_n.*
a) L_6
b) L_{987}
c) L_{98765}
d) $L_{9876543}$

Question à développer pendant l'oral 4 *Présenter votre algorithme.*

2 Énumérer les suites de capacité bornées

Fixons n, on définit un ordre total sur les suites de capacité au plus n : $\ell_1 = (a_0, \ldots, a_{k-1}) \prec \ell_2 = (b_0, \ldots, b_{p-1})$ si :
— soit ℓ_1 est un préfixe de ℓ_2,
— soit ℓ_1 n'est pas un préfixe de ℓ_2 et il existe $i < k$ tel que pour tout $j < i$, $a_j = b_j$ et $a_i < b_i$.
Par exemple, voici l'énumération des suites de capacité au plus 3 dans l'ordre $\prec$:

$$() \qquad (1) \qquad (1, 1) \qquad (1, 1, 1) \qquad (1, 2) \qquad (2) \qquad (2, 1) \qquad (3)$$

Question 6 *Calculer pour une suite ℓ et un entier n l'indice de ℓ dans la suite (indexée depuis 0) énumérant les suites de capacité au plus n dans l'ordre $\prec$, et -1 si ℓ a capacité plus que n.*
a) $\ell = \mathcal{B}(2, 4, 13)$ $\quad n = 7$
b) $\ell = \mathcal{B}(3, 6, 17)$ $\quad n = 15$
c) $\ell = \mathcal{B}(3, 8, 41)$ $\quad n = 20$
d) $\ell = \mathcal{B}(5, 8, 97)$ $\quad n = 25$

On définit un deuxième ordre total sur les suites de capacité au plus n : $\ell_1 = (a_0, \ldots, a_{k-1}) < \ell_2 = (b_0, \ldots, b_{p-1})$ si :
— soit $k < p$,
— soit $k \geq p$ et il existe $i < k$ tel que pour tout $j < i$, $a_j = b_j$ et $a_i < b_i$.
Par exemple, voici l'énumération des suites de capacité au plus 3 dans l'ordre $<$:

$$() \qquad (1) \qquad (2) \qquad (3) \qquad (1, 1) \qquad (1, 2) \qquad (2, 1) \qquad (1, 1, 1)$$

Question 7 *Calculer pour une suite ℓ et un entier n l'indice de ℓ dans la suite (indexée depuis 0) énumérant les suites de capacité au plus n dans l'ordre $<$, et -1 si ℓ a capacité plus que n.*
a) $\ell = \mathcal{B}(2, 4, 13)$ $\quad n = 7$
b) $\ell = \mathcal{B}(3, 6, 17)$ $\quad n = 15$
c) $\ell = \mathcal{B}(3, 8, 41)$ $\quad n = 20$
d) $\ell = \mathcal{B}(5, 8, 97)$ $\quad n = 25$

Question à développer pendant l'oral 5 *On peut organiser toutes les suites de capacité au plus n dans un arbre : la racine est la suite vide, et les fils d'un noeud correspondant à la suite ℓ sont les suites étendant ℓ par un élément (à droite).*
Comment interpréter les deux énumérations précédentes avec cet arbre ? Combien y a t-il de suites de capacité au plus n ? Donner une borne supérieure en fonction de n. Pour $n = 25$, combien cela implique t-il d'opérations ?

3 Tester si une suite est universelle

Question 8 *Calculer pour une suite ℓ le plus grand entier n tel que ℓ soit n-universelle.*
Indication : il n'est pas nécessaire d'énumérer toutes les suites de capacité au plus n. Pour chaque suffixe de ℓ, chercher le plus grand n tel que le suffixe est n-universel.
On note $\ell \oplus \ell'$ pour la somme composante par composante de deux suites, et $\ell \ominus \ell'$ pour la différence.
On note $\text{FILTRE}_{\geq 1}$ la fonction qui remplace les composantes négatives ou nulles d'un tableau par 1.
a) $\ell = \text{FILTRE}_{\geq 1}(L_{16} \oplus \mathcal{B}(8, 16, 13) \ominus \mathcal{B}(10, 16, 14))$
b) $\ell = \text{FILTRE}_{\geq 1}(L_{67} \oplus \mathcal{B}(13, 67, 15) \ominus \mathcal{B}(18, 67, 16))$
c) $\ell = \text{FILTRE}_{\geq 1}(L_{678} \oplus \mathcal{B}(21, 678, 17) \ominus \mathcal{B}(24, 678, 18))$
d) $\ell = \text{FILTRE}_{\geq 1}(L_{987} \oplus \mathcal{B}(72, 987, 19) \ominus \mathcal{B}(68, 987, 20))$

Question à développer pendant l'oral 6 *Présenter votre algorithme et sa complexité.*

4 Compter le nombre de dominations

Question 9 *Calculer pour deux suites $\ell_1 = (a_0, \ldots, a_{k-1}), \ell_2 = (b_0, \ldots, b_{p-1})$ le nombre de façons différentes que ℓ_1 domine ℓ_2, c'est-à-dire le nombre de suites $(i_0, \ldots, i_{p-1})$ tel que $0 \leq i_0 < \cdots < i_{p-1} \leq k-1$ et pour tout $j \in \{0, \ldots, p-1\}$, on a $b_j \leq a_{i_j}$.*
On fera le calcul modulo 10^6.
a) $\ell_1 = \mathcal{B}(9, 5, 13)$ $\quad \ell_2 = \mathcal{B}(5, 3, 42)$
b) $\ell_1 = \mathcal{B}(98, 54, 17)$ $\quad \ell_2 = \mathcal{B}(69, 23, 43)$
c) $\ell_1 = \mathcal{B}(987, 543, 41)$ $\quad \ell_2 = \mathcal{B}(789, 145, 174)$
d) $\ell_1 = \mathcal{B}(98765, 5432, 97)$ $\quad \ell_2 = \mathcal{B}(56789, 1234, 81)$.

Question à développer pendant l'oral 7 *Présenter votre algorithme et sa complexité.*

Fiche réponse type: Suites universelles

$\widetilde{u_0}$: 42

Question 1

a) 763

b) 549

c) 323

Question 2

a) 21

b) 2610

c) 255180

d) 2689486783

Question 3

a) -1

b) 14

c) 7

d) 141

Question 4

a) 4

b) 3

c) 111

d) 5414

Question 5

a) 14

b) 8857

c) 1547951

d) 220259841

Question 6

a) 44

b) 1734

c) 54984

d) 29173696

Question 7

a) 77

b) 4965

c) 138886

d) 1460878

Question 8

a) 10

b) 46

c) 497

d) 806

Question 9

a) 5

b) 774789

c) 484298

d) 758749

Fiche réponse: Suites universelles

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

d)

Question 3

a)

b)

c)

d)

Question 4

a)

b)

c)

d)

Question 5

a)

b)

c)

d)

Question 6

a)

b)

c)

d)

Question 7

a)

b)

c)

d)

Question 8

a)

b)

c)

d)

Question 9

a)

b)

c)

d)