# Qui est-ce ?

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve : 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2019

**ATTENTION !**

N'oubliez en aucun cas de recopier votre $u_0$
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

**Important.**

Il vous a été donné un numéro $u_0$ qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion !). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de $u_0$. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre $u_0$) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures !

Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre $n$, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple : $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...

Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

# 1 Préliminaires

## Notations

On rappelle que pour deux entiers naturels $a$ et $b$, $a \mod b$ désigne le reste de la division entière de $a$ par $b$, c'est à dire l'unique entier $r$ avec $0 \leq r < b$ tel que $a = k \times b + r$ pour $k \in \mathbb{N}$.
Une liste finie contenant les éléments $a_0 \dots a_k$ dans cet ordre, sera notée $\vec{a}$ ou $\langle a_0 \dots a_k \rangle$. En particulier $\langle\rangle$ représente la liste vide. On note $|\vec{a}|$ le nombre d'éléments de la liste. Étant donnée une liste $\vec{l} = \langle l_0 \dots l_k \rangle$ on note $\vec{l}[i]$ pour le $i$-ème élément de la liste en partant de 0 (ici on a $\vec{l}[i] = l_i$).
On note $[i \mathinner{..} j]$ l'ensemble constitué des entiers entre $i$ et $j$, c'est à dire $[i \mathinner{..} j] = \{v \in \mathbb{N} \mid i \leq v \leq j\}$.

## Générateur de nombres pseudo-aléatoires

Étant donné $u_0$ on définit la récurrence :

$$\forall t \in \mathbb{N},\ u_{t+1} = 900\,007 \times u_t \mod 1\,000\,000\,007$$

L'entier $u_0$ vous est donné, et doit être recopié sur votre fiche réponse avec vos résultats. Une fiche réponse type vous est donnée en exemple, et contient tous les résultats attendus pour une valeur de $u_0$ différente de la vôtre (notée $\widetilde{u_0}$). Il vous est conseillé de tester vos algorithmes avec cet $\widetilde{u_0}$. Pour chaque calcul demandé, avec le bon choix d'algorithme le calcul ne devrait demander qu'au plus quelques secondes, jamais plus d'une minute.

**Question 1** *Calculer les valeurs suivantes :* ***a)*** $u_1$ *mod* $1\,000$, ***b)*** $u_{42}$ *mod* $1\,000$, ***c)*** $u_{1\,000}$ *mod* $1\,000$, *et* ***d)*** $u_{10^6}$ *mod* $1\,000$.

## Ensemble pseudo-aléatoire de vecteurs booléens

Étant donnés quatre entiers $p > 0$, $d$, $i$ et $0 \leq k < d$ on définit le booléen $\mathcal{B}(p, d, i, k)$ de la façon suivante :

$$\mathcal{B}(p,d,i,k) = \begin{cases} 0 & \text{quand } u_{i \times d + k} \mod p = 0 \\ 1 & \text{quand } u_{i \times d + k} \mod p > 0 \end{cases}$$

On note alors $\mathcal{V}(p, d, i)$ le vecteur booléen de dimension $d$ tel que pour $0 \leq k < d$ on ait $\mathcal{V}(p, d, i)[k] = \mathcal{B}(p, d, i, k)$ et on construit l'ensemble $\mathcal{E}(p, d, n)$ de vecteurs booléens de dimension $d$ comme $\mathcal{E}(p, d, n) = \{\mathcal{V}(p, d, 0), \dots, \mathcal{V}(p, d, n-1)\}$.
Le cardinal de l'ensemble $\mathcal{E}(p, d, n)$ n'est pas nécessairement égal à $n$ car certains des vecteurs peuvent être égaux. Pour calculer $\mathcal{E}(p, d, n)$, on cherche donc à d'abord trouver un ensemble $\{e_0 \dots e_\ell\}$ tel que pour tout $i$, $0 \leq e_i < n$, on ait $\mathcal{E}(p, d, n) = \{\mathcal{V}(p, d, e_0) \dots \mathcal{V}(p, d, e_\ell)\}$ et que pour tout $i \neq j$ on ait $\mathcal{V}(p, d, e_i) \neq \mathcal{V}(p, d, e_j)$.

**Question à développer pendant l'oral 1** *On considère la fonction* `Unique` *définie ci-dessous. Justifier que si* `Unique(`*p, d, {0,1, …, n-1},0*`)` $= \{e_0, \dots, e_\ell\}$ *alors* $\mathcal{E}(p, d, n) = \{\mathcal{V}(p, d, e_0), \dots, \mathcal{V}(p, d, e_\ell)\}$ *et les* $\mathcal{V}(p, d, e_j)$ *sont tous distincts.*

**fonction** `Unique`($p$, $d$, $l$, $k$) **:**

  **si** $l = \emptyset$ **alors**

    **retourner** $\emptyset$

  **fin**

  **si** $d = k$ **alors**

    **retourner** $\{e\}$ *où $e$ est un des éléments de $l$ (peu importe lequel)*

  **fin**

  $l_0 \leftarrow \{e \in l \mid \mathcal{B}(p, d, e, k) = 0\}$

  $l_1 \leftarrow \{e \in l \mid \mathcal{B}(p, d, e, k) = 1\}$

  **retourner** `Unique`($p$, $d$, $l_0$, $k+1$) $\cup$ `Unique`($p$, $d$, $l_1$, $k+1$)

**Question 2** *En utilisant la fonction* `Unique`*, calculer la taille des ensembles suivants :* ***a)*** $\mathcal{E}(2, 4, 10)$ ***b)*** $\mathcal{E}(100, 500, 2\,000)$ ***c)*** $\mathcal{E}(2, 25, 25\,000)$.

**Question à développer pendant l'oral 2** *Analyser la complexité de votre algorithme pour calculer la taille de $\mathcal{E}(p, d, n)$ en fonction $n$ et $d$ (en incluant le calcul de la fonction* `Unique`*).*

# 2 Le jeu "Qui est-ce ?"

## Modélisation générale

Le jeu "Qui est-ce ?" est un jeu à deux joueurs. Dans ce jeu, chaque joueur reçoit un personnage choisi aléatoirement parmi une liste prédéfinie. L'objectif de chaque joueur est de deviner le personnage reçu par l'autre joueur en posant, tour à tour, des questions. Ici, on s'intéresse à une variante où seul un des deux joueurs, le joueur $Q$, pose des questions tandis que le joueur $R$ y répond.

On modélise le jeu de la façon suivante : la liste des personnages est vue comme un ensemble $E$ de $n$ vecteurs booléens de dimension $d$, cet ensemble est connu des deux joueurs. Le joueur $R$ choisit un vecteur $\vec{v}_{sec} \in E$ et $Q$ va devoir deviner quel est ce $\vec{v}_{sec}$. Pour cela, à chaque tour $i$, $Q$ choisit $q_i \in [0\,..\,d-1]$ et demande à $R$ la valeur $\vec{v}_{sec}[q_i]$ de la $q_i$-ème composante de $\vec{v}_{sec}$. $R$ répond par $r_i = \vec{v}_{sec}[q_i]$. Étant donnée une situation de jeu où $Q$ a posé les questions $\vec{q}$ et $R$ a répondu $\vec{r}$, le jeu se termine s'il n'existe plus qu'un seul $v \in E$ tel que pour tout $0 \leq i < |\vec{q}|$ on ait $\vec{v}\,[\vec{q}\,[i]] = \vec{r}\,[i]$. Sinon le jeu continue et $Q$ doit poser une nouvelle question.

Pour une liste de questions $\vec{q}$ et de réponses $\vec{r}$ on note $\textsc{compatibles}(E, \vec{q}, \vec{r})$, l'ensemble des éléments de $E$ compatibles avec les réponses aux questions. Formellement :

$$\textsc{compatibles}(E, \vec{q}, \vec{r}) = \{v \in E \mid \forall 0 \leq i < |\vec{q}|,\ \vec{v}\,[\vec{q}\,[i]] = \vec{r}\,[i]\}$$

**Question 3** *Calculer la taille de $\textsc{compatibles}(E, \langle 0 \rangle, \langle 0 \rangle)$, c'est à dire le nombre de vecteurs compatibles avec la réponse 0 à la question 0, pour les $E$ suivants :* ***a)*** $E = \mathcal{E}(2, 4, 10)$ ***b)*** $E = \mathcal{E}(100, 500, 2\,000)$ ***c)*** $E = \mathcal{E}(2, 25, 25\,000)$.

## Stratégies

Une stratégie $\mathcal{S}$ pour le joueur $Q$ est une fonction qui prend en paramètre la liste $\vec{q}$ des questions déjà posées, la liste $\vec{r}$ des réponses obtenues et retourne une nouvelle question $q_{i+1} = \mathcal{S}(E, \vec{q}, \vec{r})$.

Ainsi si $Q$ emploie la stratégie $\mathcal{S}$, il posera la question $q_0 = \mathcal{S}(E, \langle\rangle, \langle\rangle)$ au premier tour, puis au $i+1$-ème tour il posera la question $q_i = \mathcal{S}(E, \langle q_0, \ldots, q_{i-1}\rangle, \langle r_0, \ldots, r_{i-1}\rangle)$ sauf si $|\textsc{compatibles}(E, \langle q_0, \ldots, q_{i-1}\rangle, \langle r_0, \ldots, r_{i-1}\rangle)| = 1$, auquel cas le jeu se termine et $Q$ ne pose pas de question.

Étant donnés un ensemble $E$ et un vecteur $\vec{v}_{sec} \in E$ tiré par $R$, le coût d'une stratégie $\mathcal{S}$ sur ce $\vec{v}_{sec}$, noté $\textsc{coût}(\mathcal{S}, \vec{v}_{sec}, E)$, est le nombre de questions que va poser $Q$ avant que le jeu se termine, et si le jeu ne termine jamais, alors $\textsc{coût}(\mathcal{S}, \vec{v}_{sec}, E) = \infty$. Le coût total d'une stratégie $\mathcal{S}$ sur un ensemble $E$, $\textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}, E)$, est la somme des coûts pour chacun des tirages possibles pour $\vec{v}_{sec}$, formellement on a $\textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}, E) = \sum_{v \in E} \textsc{coût}(\mathcal{S}, v, E)$.

On va maintenant étudier diverses stratégies pour le joueur $Q$.

**Question à développer pendant l'oral 3** *Montrer que si $\mathcal{S}$ est une stratégie et $E$ un ensemble de $n$ vecteurs booléens de dimension $d$ alors : $n \times log_2(n) \leq \textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}, E)$.*

## Stratégie "dans l'ordre"

La stratégie $\mathcal{S}_{ord}$ consiste à demander d'abord la coordonnée 0, puis 1, etc., formellement $\mathcal{S}_{ord}(E, \vec{q}, \vec{r}) = |\vec{q}|$.

**Question 4** *Calculer $\textsc{coût}(\mathcal{S}_{ord}, V, E)$ pour les ensembles $E = \mathcal{E}(p, d, n)$ et les vecteurs $V = \mathcal{V}(p, d, 0)$ pour les valeurs de $p, d, n$ suivantes :* ***a)*** $p = 2, d = 4, n = 10$ ***b)*** $p = 100, d = 500, n = 2\,000$ ***c)*** $p = 2, d = 25, n = 25\,000$.

**Question 5** *Calculer $\textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}_{ord}, E)$ pour les ensembles $E = \mathcal{E}(p, d, n)$ pour les valeurs de $p, d, n$ suivantes :* ***a)*** $p = 2, d = 4, n = 10$ ***b)*** $p = 100, d = 500, n = 2\,000$ ***c)*** $p = 2, d = 25, n = 25\,000$.

**Indication.** Il existe une méthode plus efficace que de faire la somme de $\textsc{coût}(\mathcal{S}_{ord}, V, E)$ pour chaque $V \in E$. Par exemple, en calculant récursivement $\textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}_{ord}, E)$.

**Question à développer pendant l'oral 4** *Décrire l'algorithme utilisé pour calculer $\textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}_{ord}, E)$ et analyser sa complexité en fonction de la taille $n$ de l'ensemble $E$ et de la dimension $d$ de ses vecteurs.*

## Stratégie heuristique de la meilleure coupe

Étant donné un ensemble $E$ de vecteurs booléens de dimension $d$, le déséquilibre de la question $i \in [0\,..\,d-1]$ sur l'ensemble $E$, noté $\textsc{déséquilibre}(E, i)$, est la différence de taille (en valeur absolue) entre les deux sous-ensembles de $E$ composés de vecteurs ayant 0 ou 1 en $i$-ème coordonnée. Formellement :

$$\textsc{déséquilibre}(E, i) = abs(|\{\vec{v} \in E \mid \vec{v}\,[i] = 0\}| - |\{v \in E \mid \vec{v}\,[i] = 1\}|)$$

La meilleure question sur un ensemble de vecteurs $E$, notée $\textsc{meilleureQuestion}(E)$ est définie comme la question $i \in [0\,..\,d-1]$ qui a la valeur $\textsc{déséquilibre}(E, i)$ minimale. Et si plusieurs questions partagent cette valeur minimale, alors la meilleure question est celle qui correspond à l'entier le plus petit.

**Question 6** *Calculer* $\textsc{meilleureQuestion}(E)$ *pour les* $E$ *suivants :* ***a)*** $E = \mathcal{E}(2, 4, 10)$ ***b)*** $E = \mathcal{E}(100, 500, 2\,000)$ ***c)*** $E = \mathcal{E}(2, 25, 25\,000)$.

Nous étudions maintenant la stratégie $\mathcal{S}_{coupe}$ où le joueur $Q$ choisit à chaque tour la meilleure question par rapport aux vecteurs compatibles. C'est à dire, formellement : $\mathcal{S}_{coupe}(E, \vec{q}, \vec{r}) = \textsc{meilleureQuestion}(\textsc{compatibles}(E, \vec{q}, \vec{r}))$.

**Question 7** *Calculer* $\textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}_{coupe}, E)$ *pour les ensembles* $E$ *suivants :* ***a)*** $E = \mathcal{E}(2, 4, 10)$ ***b)*** $E = \mathcal{E}(100, 500, 2\,000)$ ***c)*** $E = \mathcal{E}(2, 25, 25\,000)$.

**Question à développer pendant l'oral 5** *Décrire l'algorithme utilisé pour calculer* $\textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}_{coupe}, E)$ *et analyser sa complexité en fonction de la taille* $n$ *de l'ensemble* $E$ *et de la dimension* $d$ *de ses vecteurs.*

### Instance univers

Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $\textsc{BitEnsemble}(j)$ l'ensemble des positions contenant des 1 dans la représentation binaire de $j$. Formellement, $\textsc{BitEnsemble}(j) = \{i \in \mathbb{N} \mid 2^i \leq (j \mod 2^{i+1})\}$. On définit $E_n^\forall$ comme étant l'ensemble des $n$ vecteurs booléens $v_0 \dots v_{n-1}$ de dimension $2^n$ définis de la façon suivante :

$$v_i[j] = \begin{cases} 1 & \text{quand } i \in \textsc{BitEnsemble}(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Question à développer pendant l'oral 6** *Justifier que la stratégie* $\mathcal{S}_{coupe}$ *est optimale sur l'instance* $E_n^\forall$*, c'est à dire que* $\textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}_{coupe}, E_n^\forall) \leq \textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}', E_n^\forall)$ *pour toute stratégie* $\mathcal{S}'$.

## 3 Le jeu "Qui est-ce ?" avec mensonge

Dans la section précédente, nous avons une variante du jeu où le joueur $R$ ne fait que répondre aux questions de $Q$. On va maintenant supposer que le joueur $R$ a le droit de <u>mentir</u>. Étant donnée une question $q$ il peut soit répondre normalement $\vec{v}_{sec}[q]$ soit <u>mentir</u> et répondre $1 - \vec{v}_{sec}[q]$. Bien évidemment, pour que le joueur $Q$ ait une chance, on va supposer que $R$ ne ment, au plus, qu'une fois au cours d'une partie.
Le joueur $R$ faisant maintenant des choix, il nous faut redéfinir certaines notions. On note $\textsc{compatiblesZeroOuUnMensonge}(E, \vec{q}, \vec{r})$, l'ensemble des éléments de $E$ compatibles avec les réponses aux questions en sachant qu'au plus une des réponses est fausse, formellement :

$$\textsc{compatiblesZeroOuUnMensonge}(E, \vec{q}, \vec{r}) = \{v \in E \mid \exists j, \forall 0 \leq i < |\vec{q}|,\ \vec{v}\,[\vec{q}\,[i]] = \vec{r}\,[i] \vee i = j\}$$

Une partie va se dérouler de la façon suivante, au début du jeu $R$ reçoit un vecteur $\vec{v}_{sec} \in E$. À chaque tour $i$, si $|\textsc{compatiblesZeroOuUnMensonge}(E, \vec{q}, \vec{r})| = 1$ alors la partie se termine, sinon $Q$ va poser une question $q_i$. $R$ pourra toujours répondre à cette question avec $r_i = \vec{v}_{sec}\,[\vec{q}\,[i]]$ mais si $R$ n'a pas encore menti, il peut aussi choisir de répondre avec $r_i = 1 - \vec{v}_{sec}\,[\vec{q}\,[i]]$.
Une stratégie $\mathcal{S}$ sera définie de la même façon qu'avant, en revanche il n'est plus possible de définir le coût d'une stratégie $\mathcal{S}$ comme avant, car $R$ fait des choix. On va donc définir le <u>coût pire cas</u> d'une stratégie $\mathcal{S}$, noté $\textsc{coûtPireCas}(E, \mathcal{S})$, comme le plus grand nombre de questions que $Q$ va

poser en utilisant la stratégie $\mathcal{S}$ quels que soient le vecteur $\vec{v}_{sec}$ et les réponses de $R$. On note aussi $\textsc{coûtPireCasMinimal}(E) = min_{\mathcal{S}}(\textsc{coûtPireCas}(E, \mathcal{S}))$.

**Question à développer pendant l'oral 7** *Montrer que si $E$ contient exactement deux vecteurs booléens, alors $\textsc{coûtPireCasMinimal}(E) = 3$.*

### Instance univers

**Question à développer pendant l'oral 8** *Montrer que pour tout sous-ensemble $E' \subseteq E_n^{\forall}$ il existe $j$ avec $0 \leq j < 2^n$ tel que $E' = \{v \in E_n^{\forall} \mid v[j] = 1\}$. En déduire que pour tout ensemble $H$ de $n$ vecteurs booléens et pour toute stratégie $\mathcal{S}$ il existe $\mathcal{S}'$ tel que $\textsc{coûtPireCas}(\mathcal{S}', E_n^{\forall}) = \textsc{coûtPireCas}(\mathcal{S}, H)$ et donc que $\textsc{coûtPireCasMinimal}(H) \geq \textsc{coûtPireCasMinimal}(E_n^{\forall})$.*

**Question 8** *On note pour cette question $f(n) = n + (u_n \mod 10)$ et $h(n) = \textsc{coûtPireCasMinimal}(E_{f(n)}^{\forall})$. Calculer :* ***a)*** $h(3)$ ***b)*** $h(25)$ ***c)*** $h(90)$ ***d)*** $\sum_{i=1}^{10} h(i * 5)$.

**Question à développer pendant l'oral 9** *Décrire l'algorithme utilisé pour calculer $\textsc{coûtPireCasMinimal}(E_n^{\forall})$ et analyser sa complexité en fonction de $n$.*

## 4 Stratégies optimales

Nous allons maintenant nous intéresser aux stratégies optimales pour n'importe quel ensemble $E$, d'abord dans le cas du jeu sans mensonge puis avec mensonge.

### Cas sans mensonge

**Question à développer pendant l'oral 10** *On note $\textsc{coûtTotalMinimal}(E)$ la valeur minimum que peut prendre $\textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}, E)$ pour une stratégie dans le jeu sans mensonge, c'est à dire : $\textsc{coûtTotalMinimal}(E) = min_{\mathcal{S}}(\textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}, E))$. Exhiber une stratégie $\mathcal{S}_{opt}$ telle que pour tout $E$ on ait $\textsc{coûtTotalMinimal}(E) = \textsc{coûtTotal}(\mathcal{S}_{opt}, E)$. Montrer que l'on peut choisir $\mathcal{S}_{opt}$ de façon à ce que $\mathcal{S}_{opt}(E, \vec{q}, \vec{r}) = f(\textsc{compatibles}(E, \vec{q}, \vec{r}))$ pour une certaine fonction $f$.*

**Question 9** *Calculer $\textsc{coûtTotalMinimal}(E)$ pour les ensembles $E$ suivants :* ***a)*** $E = \mathcal{E}(2, 6, 4)$ ***b)*** $E = \mathcal{E}(2, 10, 20)$ ***c)*** $E = \mathcal{E}(3, 10, 25)$.

**Question à développer pendant l'oral 11** *Décrire l'algorithme utilisé pour calculer $\textsc{coûtTotalMinimal}(E)$ et analyser sa complexité en fonction de la taille $n$ de l'ensemble $E$ et de la dimension $d$ de ses vecteurs.*

### Cas avec mensonge

**Question 10** *Dans le cas du jeu avec mensonge, calculer $\textsc{coûtPireCasMinimal}(E)$ pour les ensembles $E$ suivants :* ***a)*** $E = \mathcal{E}(2, 6, 4)$ ***b)*** $E = \mathcal{E}(2, 8, 14)$ ***c)*** $E = \mathcal{E}(3, 10, 14)$.

**Question à développer pendant l'oral 12** *Décrire l'algorithme utilisé pour calculer $\textsc{coûtPireCasMinimal}(E)$ et analyser sa complexité en fonction de la taille $n$ de l'ensemble et de la dimension $d$ des vecteurs.*

## 5 Stratégie “dans l’ordre” améliorée

Revenons au jeu sans mensonge. Dans ce jeu nous avons vu plusieurs stratégies. Parmi celles-ci, la stratégie $\mathcal{S}_{ord}$ avait l’avantage d’être très facile à mémoriser et à appliquer mais elle a les deux défauts suivants :

— d’une part elle utilise parfois des questions inutiles. Si, par exemple, tous les vecteurs $v \in$ COMPATIBLES$(E, \vec{q}, \vec{r})$ partagent la même valeur $v[|\vec{q}|]$, $\mathcal{S}_{ord}$ posera la question $|\vec{q}|$ alors qu’elle n’apporte aucune information ;

— d’autre part elle dépend de l’ordre des dimensions du vecteur mais cet ordre n’est pas forcément le plus adapté.

On cherche donc à améliorer la stratégie $S_{ord}$ pour corriger ces deux défauts. Pour cela, on définit la stratégie $\mathcal{S}_\sigma$ pour $\sigma$ une permutation de $[0\,..\,d-1]$ (c’est à dire une fonction bijective de $[0\,..\,d-1]$ dans $[0\,..\,d-1]$). La stratégie $\mathcal{S}_\sigma$ choisit, à chaque tour, le plus petit $i$ tel que $\sigma(i)$ soit une question utile. Formellement $\mathcal{S}_\sigma$ est définie de la façon suivante :

$$\mathcal{S}_\sigma(E, \vec{q}, \vec{r}) = \sigma\left( min\left\{ i \in [0\,..\,d-1] \mid \exists (\vec{v}, \vec{v'}) \in \text{COMPATIBLES}(E, \vec{q}, \vec{r})^2 \text{ tels que } \vec{v'}\,[\sigma(i)] \neq \vec{v}\,[\sigma(i)] \right\}\right)$$

**Question 11** *On note $\mathfrak{S}_d$ l’ensemble des permutations de $[0\,..\,d-1]$ et l’on s’intéresse au coût de la stratégie $\mathcal{S}_\sigma$ qui a le coût minimal parmi tous les $\mathcal{S}_\tau$, pour $\tau \in \mathfrak{S}_d$. Calculer $min_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}$(*COÛTTOTAL*$(\mathcal{S}_\sigma, E)$) pour les ensembles $E$ suivants :* ***a)*** $E = \mathcal{E}(2, 6, 10)$ ***b)*** $E = \mathcal{E}(2, 12, 30)$ ***c)*** $E = \mathcal{E}(3, 14, 150)$.

**Question à développer pendant l’oral 13** *Décrire l’algorithme utilisé pour calculer $min_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}$(*COÛTTOTAL*$(\mathcal{S}_\sigma, E)$) et analyser sa complexité en fonction de la taille $n$ de l’ensemble $E$ et de la dimension $d$ de ses vecteurs.*

# Fiche réponse type : Qui est-ce ?

$\widetilde{u_0}$ **: 395**

**Question 1**

a) 765

b) 661

c) 447

d) 311

**Question 2**

a) 8

b) 1980

c) 24992

**Question 3**

a) 2

b) 21

c) 12479

**Question 4**

a) 4

b) 109

c) 17

**Question 5**

a) 26

b) 364470

c) 398254

**Question 6**

a) 2

b) 39

c) 8

**Question 7**

a) 24

b) 129770

c) 367108

**Question 8**

a) 6

b) 9

c) 10

d) 86

**Question 9**

a) 9

b) 82

c) 119

**Question 10**

a) 7

b) 9

c) 8

**Question 11**

a) 34

b) 143

c) 1128

# Fiche réponse : Qui est-ce ?

## Nom, prénom, $u_0$ : ..............................................

**Question 1**

a)

b)

c)

d)

**Question 2**

a)

b)

c)

**Question 3**

a)

b)

c)

**Question 4**

a)

b)

c)

**Question 5**

a)

b)

c)

**Question 6**

a)

b)

c)

**Question 7**

a)

b)

c)

### Question 8

a)

b)

c)

d)

### Question 9

a)

b)

c)

### Question 10

a)

b)

c)

### Question 11

a)

b)

c)