Chasse au trésor sur graphes

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2019

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Il vous a été donné un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

1 Préliminaires

Dans cet exercice on s'intéresse à une chasse au trésor sur graphes où l'objectif est de ramasser des pièces d'or le plus rapidement possible.

On appelle graphe un couple $G = \langle V, E \rangle$ où V est l'ensemble fini des sommets et $E \subseteq \binom{V}{2}$ est l'ensemble des arêtes. On note $\binom{V}{2}$ l'ensemble des sous-ensembles de cardinal 2 de V, ou de manière équivalente l'ensemble des paires (non ordonnées) de V. En d'autres termes, les graphes que l'on considère sont non-orientés.
Le nombre $\binom{n}{2}$ désigne, lorsque n est un entier, le coefficient binomial classique. On note $|V|$ le cardinal de V, on a $\left|\binom{V}{2}\right| = \binom{|V|}{2}$. Pour plus de simplicité, nous supposerons par la suite que V est l'ensemble des entiers de 0 à $n-1$, n étant le nombre de sommets du graphe.

On part du sommet 0 du graphe. On fixe un entier k et on considère que les k sommets de plus grands indices disposent chacun d'une pièce d'or.

À chaque tour, on se déplace en suivant une arête. Si le sommet contient une pièce d'or, celle-ci est immédiatement ramassée et vient compléter la collection de pièces d'or.

2 Définitions

Étant donné u_0, on définit par récurrence

$$\forall t \in \mathbb{N}, u_{t+1} = 19\ 999\ 999 u_t \pmod{19\ 999\ 981},$$

c'est-à-dire u_{t+1} est le reste de la division par 19 999 981 du produit entre 19 999 999 et u_t.

Question 1 *Donner les valeurs de u_t suivantes :* ***a)*** $u_{123} \pmod{1000}$, ***b)*** $u_{456} \pmod{1000}$, ***c)*** $u_{789} \pmod{1000}$.

À partir de la suite $(u_t)_t$ et de deux paramètres entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on construit un graphe. Pour cela, on s'appuie sur la suite $(v_t)_t$ obtenue à partir de $(u_t)_t$ terme à terme :

$$\forall t \in \mathbb{N}, v_t = \begin{cases} 1 & \text{si } u_t \pmod{10\ 000} < p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le graphe s'obtient en considérant que les $n-1$ premières valeurs de $(v_t)_t$ sont caractéristiques des arêtes reliant le sommet 0 aux autres sommets. Pour un graphe contenant au moins quatre sommets, cela veut dire que $\{0,1\} \in E$ si et seulement si v_0 vaut 1, $\{0,2\} \in E$ si et seulement si v_1 vaut 1, $\{0,3\} \in E$ si et seulement si v_2 vaut 1 ...
Les $n-2$ valeurs suivantes sont caractéristiques des arêtes reliant le sommet 1 aux sommets d'indice plus importants : v_{n-1} vaut 1 si et seulement si $\{1,2\} \in E$, v_n vaut 1 si et seulement si $\{1,3\} \in E$...
Et ainsi de suite jusqu'à $v_{\binom{n}{2}-1}$ qui vaut 1 si et seulement si $\{n-2, n-1\} \in E$.
Ainsi, on notera que pour $p \geq 10\ 000$ on obtient un graphe complet alors que pour $p = 0$ le graphe ne contient aucune arête.

Question 2 *Calculer le nombre d'arêtes pour les graphes suivants.*
a) *Le graphe avec* $n = 10$ *et* $p = 654$, ***b)*** *Le graphe avec* $n = 100$, $p = 543$, ***c)*** *Le graphe avec* $n = 1\ 000$, $p = 12$.

Question à développer pendant l'oral 1 *Compte tenu des valeurs de* p *dans la question précédente, quel type de structure de données vaut-il mieux utiliser pour représenter les graphes en mémoire ?*

Question 3 *Calculer le nombre de sommets dans la composante connexe de 0, c'est-à-dire le nombre de sommets qui sont reliés à 0 par un chemin, pour les graphes suivants.*
a) *Le graphe avec* $n = 10$ *et* $p = 654$, ***b)*** *Le graphe avec* $n = 100$, $p = 543$, ***c)*** *Le graphe avec* $n = 1\ 000$, $p = 12$.

Question à développer pendant l'oral 2 *Présenter votre algorithme et estimer sa complexité.*

Question 4 *Calculer le nombre de composantes connexes pour les graphes suivants.*
a) *Le graphe avec* $n = 10$ *et* $p = 654$, ***b)*** *Le graphe avec* $n = 100$, $p = 543$, ***c)*** *Le graphe avec* $n = 1\ 000$, $p = 12$.

Question à développer pendant l'oral 3 *Présenter votre algorithme et montrer sa correction.*

3 Nombre de mouvements pour un nombre fixé de pièces

Afin de s'assurer que les graphes soient bien connexes, nous ajouterons à présent à tous les graphes générés les arêtes de la forme $\{i, i+1\}$, pour $0 \leq i < n-1$.

La distance entre deux sommets est la longueur du plus court chemin entre eux, où la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes.

On fixe un nombre k de pièces, qui sont sur les sommets $n-1, n-2, \ldots, n-k$, et on veut minimiser le nombre de mouvements nécéssaires pour les ramasser toutes.

Nous étudions la stratégie gloutonne suivante : à chaque instant, on se déplace vers la pièce d'or la plus proche. En cas de deux pièces d'or à distances égales, on choisit celle sur le sommet du plus petit indice (si la pièce à la case 89 et celle à la case 94 sont toutes deux les plus proches, elle choisira d'aller d'abord à la case 89).

Question 5 *Déterminer le nombre de mouvements de la stratégie gloutonne pour ramasser toutes les pièces d'or pour les graphes suivants.*
a) $n = 100$, $p = 32$, *et* $k = 10$, ***b)*** $n = 200$, $p = 21$, $k = 15$, ***c)*** $n = 1\ 000$, $p = 1$, $k = 20$.

Question à développer pendant l'oral 4 *Donner un exemple (simple) de graphe pour lequel la stratégie gloutonne n'est pas optimale, au sens où aller chercher les pièces d'or dans un autre ordre aurait pu se faire en moins de mouvements.*

À présent, on cherche une stratégie optimale pour aller chercher les pièces d'or, c'est-à-dire minimisant le nombre total de mouvements.

Question 6 *Déterminer le nombre optimal de mouvements pour ramasser toutes les pièces d'or dans les graphes suivants.*
a) $n = 100$, $p = 32$, $k = 8$, ***b)*** $n = 200$, $p = 21$, $k = 10$, ***c)*** $n = 1\ 000$, $p = 1$, $k = 12$.

Question à développer pendant l'oral 5 *Présenter votre algorithme et estimer sa complexité en fonction des paramètres n (nombre de sommets), m (nombre d'arêtes), et k.*

Question 7 *Dans cette question on ne suppose que plus que les pièces sont sur les sommets d'indices les plus grands. Elles peuvent donc être réparties de façon quelconque, aux exceptions près qu'elles sont toutes sur des sommets différents et qu'aucune n'est sur le sommet 0. À chaque configuration des pièces possibles correspond un nombre optimal de mouvements. La pire configuration est celle maximisant le nombre optimal de mouvemnts. Déterminer le nombre optimal de mouvements pour la pire configuration pour les graphes suivants.*
a) $n = 10$, $p = 654$, $k = 4$, ***b)*** $n = 20$, $p = 543$, $k = 4$, ***c)*** $n = 50$, $p = 432$, $k = 4$.

Question à développer pendant l'oral 6 *Présenter votre algorithme.*

4 Nombre de pièces pour un nombre fixé de mouvements

On fixe un nombre d de mouvements, et on veut maximiser le nombre de pièces, qui sont toujours sur les sommets $n-1, n-2, \ldots, n-k$, que l'on peut ramasser en d mouvements.

Question 8 *Calculer le k maximal tel qu'il est possible de ramasser les k pièces positionnées en $n-1, \ldots, n-k$ en (au plus) d mouvements.*
a) $n = 10$, $p = 654$, $d = 6$, ***b)*** $n = 20$, $p = 543$, $d = 8$, ***c)*** $n = 50$, $p = 432$, $d = 10$.

Nous étudions la stratégie gloutonne suivante. On maintient un chemin pour ramasser les pièces $n-1, \ldots, n-k$, c'est-à-dire l'ordre dans lequel les pièces sont ramassées. Afin d'ajouter la pièce $n-k$, on considère toutes les possibilités de ramasser la pièce $n-k$: soit entre deux pièces, soit avant, soit après. On choisit la première position minimisant le nombre de mouvements parmi ces possibilités.
Par exemple, si l'ordre courant est $4, 2, 3$, pour insérer la pièce 1, on considère les ordres suivants : $1, 4, 2, 3$; $4, 1, 2, 3$; $4, 2, 1, 3$; $4, 2, 3, 1$.

Question 9 *Calculer le k maximal tel qu'en employant la stratégie gloutonne de déplacement on ramasse les k pièces positionnées en $n-1, \ldots, n-k$ en (au plus) d mouvements.*
a) $n = 100$, $p = 32$, $d = 40$, ***b)*** $n = 200$, $p = 21$, $d = 100$, ***c)*** $n = 1\ 000$, $p = 1$, $d = 500$.

Question à développer pendant l'oral 7 *Donner un exemple (simple) de graphe pour lequel la stratégie gloutonne n'est pas optimale, au sens où il est possible de ramasser strictement plus de pièces d'or avec le même nombre de mouvements.*

◊ ◊ ◊ ◊

Fiche réponse type: Chasse au trésor sur graphes

$\widetilde{u_0}$: 42

Question 1

a) 768

b) 761

c) 593

Question 2

a) 3

b) 261

c) 607

Question 3

a) 2

b) 100

c) 1

Question 4

a) 7

b) 1

c) 394

Question 5

a) 27

b) 35

c) 36

Question 6

a) 18

b) 28

c) 34

Question 7

a) 9

b) 14

c) 16

Question 8

a) 3

b) 5

c) 8

Question 9

a) 31

b) 87

c) 469

◊ ◊ ◊ ◊

Fiche réponse: Chasse au trésor sur graphes

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)

Question 5

a)

b)

c)

Question 6

a)

b)

c)

Question 7

a)

b)

c)

Question 8

a)

b)

c)

Question 9

a)

b)

c)