# Sous-suites

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2018

**ATTENTION !**

N'oubliez en aucun cas de recopier votre $u_0$
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

**Important.**

Il vous a été donné un numéro $u_0$ qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion !). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de $u_0$. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre $u_0$) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures !
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre $n$, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***.
Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

# 1 Génération de suites

Si $a \geqslant 0$ et $b > 0$ sont deux entiers, on note $a \bmod b$ le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$, autrement dit l'unique entier $r$ avec $0 \leqslant r < b$ tel qu'il existe un entier $q$ satisfaisant $a = bq + r$. On utilise la notation $[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ pour dénoter la suite finie d'éléments $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Étant donnée une suite finie $\sigma$, on note $|\sigma|$ sa longueur, on dénote par $\sigma(i)$ le $i^{\text{ème}}$ élément (compté à partir de 0) de $\sigma$ tandis que l'on dénote par $\sigma(i,j)$ la sous-suite $[\sigma(i), \sigma(i+1), \ldots, \sigma(j-1)]$ de $\sigma$. On a en particulier $\sigma(i,i) = [\,]$ pour tout $i \in [\![0, |\sigma|[\![$ et $\sigma(0, |\sigma|) = \sigma$.

On fixe pour tout le sujet

$$m = 2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$$

et l'on définit la suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u(0) = u_0, \qquad u(n+1) = (16\,807 \times u(n) + 17) \bmod m$$

avec $u_0$ l'entier qui vous a été donné (à reporter sur votre fiche réponse). On prendra soin de tabuler les valeurs de $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $n \in [\![0, 2^{20}[\![$.

**Question 1** *Calculer* $u(n) \bmod 101$ *pour*
***a)*** $n = 16$ ***b)*** $n = 1024$ ***c)*** $n = 32768$

On définit $(\omega(\ell, n))_{\ell\in\mathbb{N}^*, n\in\mathbb{N}}$, le générateur pseudo-aléatoire de suites de longueur $\ell$ par

$$\omega(\ell, n) = [u(n) \bmod \ell, u(n+1) \bmod \ell, \ldots, u(n+\ell-1) \bmod \ell]$$

On définit ensuite l'opération de mutation $\Omega(\sigma)$ par

$$\Omega(\sigma) = [\sigma(\sigma(0)), \sigma(\sigma(1)), \ldots, \sigma(\sigma(|\sigma|-1))]$$

qui simule l'édition d'une suite donnée $\sigma$ en une autre suite de même longueur.

**Question 2** *On pose* $\sigma_1 = \omega(\ell, n)$ *et* $\sigma_2 = \Omega(\sigma_1)$. *Calculer* $\left(\sum_{i=0}^{\ell-1} \sigma_2(i)\right) \bmod 101$ *pour*
***a)*** $(\ell, n) = (100, 100)$ ***b)*** $(\ell, n) = (1000, 200)$ ***c)*** $(\ell, n) = (100982, 300)$

# 2 Plus longue sous-suite strictement croissante

Dans cette section et la suivante, on considère une suite d'entiers $\sigma$ de longueur $\ell$.

Une suite $\tau$ est une sous-suite de $\sigma$ si et seulement s'il existe $i_0 < i_1 < \ldots < i_{|\tau|-1}$ tels que $\tau = [\sigma(i_0), \sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_{|\tau|-1})]$. On dira d'une sous-suite $\tau$ qu'elle est strictement croissante si et seulement si elle vérifie également $\tau(0) < \tau(1) < \ldots < \tau(|\tau|-1)$. Inversement, $\tau$ est dite décroissante si et seulement si elle vérifie $\tau(0) \geqslant \tau(1) \geqslant \ldots \geqslant \tau(|\tau|-1)$. Par exemple, $[5,3,3,1]$ est une sous-suite décroissante de $\sigma = [5,3,4,9,6,3,1,8]$ tandis que $[3,4,6,8]$ est une sous-suite strictement croissante de $\sigma$.

On note $|\mathrm{LIS}(\sigma)|$ la longueur d'une sous-suite strictement croissante de $\sigma$ *de longueur maximale.*

Une couverture $\mathcal{C}$ de $\sigma$ est une liste de sous-suites décroissantes de $\sigma$ telle que chacun des éléments de la suite $\sigma$ apparaît une et une seule fois dans $\mathcal{C}$. La taille d'une couverture $\mathcal{C}$, notée $|\mathcal{C}|$, correspond au nombre de sous-suites décroissantes qui la compose. On parlera de plus petite couverture pour une couverture de taille minimale. Ainsi, la liste

$$[[5,3,2,1],[4],[9,6,5],[8,7,7],[10]]$$

est une couverture de taille 5 de la suite $[5,3,4,9,6,2,1,8,5,7,10,7]$.

**Question à développer pendant l'oral 1** *Soit $\tau$ une sous-suite strictement croissante de $\sigma$ et $\mathcal{C}$ une couverture de $\sigma$. Montrer que :*

1. $|\tau| \leqslant |\mathcal{C}|$
2. *si $|\tau| = |\mathcal{C}|$ alors $\tau$ est une sous-suite strictement croissante de $\sigma$ de longueur maximale*
3. *si $|\tau| = |\mathcal{C}|$ alors $\mathcal{C}$ est une couverture de taille minimale de $\sigma$*

Afin de déterminer $|\mathrm{LIS}(\sigma)|$, on propose donc de calculer la couverture minimale $\mathcal{C}$ de $\sigma$ puis d'en extraire une sous-suite strictement croissante de taille $|\mathcal{C}|$. On définit la couverture gloutonne $\mathcal{C}_g$ de $\sigma$ par l'algorithme suivant :

**L1.** (*Initialisation*). Initialiser l'indice de boucle $i \leftarrow 1$. On représente la couverture initiale par une liste composée d'une suite singleton : $\mathcal{C}_g \leftarrow [\,[\sigma(0)]\,]$.

**L2.** *(Point d'insertion).* On pose $k$ l'indice minimal (s'il est défini) pour lequel on peut étendre la sous-suite décroissante $\mathcal{C}_g(k)$ avec $\sigma(i)$ tout en préservant sa décroissance.

**L3.** *(Insertion).* Si $k$ est défini, on insère $\sigma(i)$ à la fin de $\mathcal{C}_g(k)$, qui reste donc décroissante.

**L4.** *(Extension).* Si $k$ n'est pas défini (aucune insertion possible dans les sous-suites existantes), on étend $\mathcal{C}_g$ avec une nouvelle suite singleton et donc trivialement décroissante : $\mathcal{C}_g \leftarrow \mathcal{C}_g, [\sigma(i)]$

**L5.** *(Itération).* Incrémenter $i$ de 1 pour considérer l'élément suivant.

**L6.** *(Terminaison).* L'algorithme termine lorsque l'on a parcouru tous les éléments de $\sigma$ de gauche à droite, c'est-à-dire lorsque $i = |\sigma|$.

**L7.** *(Boucle).* Sinon, retourner en L2.

**Question à développer pendant l'oral 2** *Expliquer comment on peut extraire une sous-suite strictement croissante de $\sigma$ contenant exactement un élément de chaque sous-suite décroissante de la couverture $\mathcal{C}_g$.*

**Question 3** *Calculer* $|\mathrm{LIS}(\omega(\ell,n))| \bmod 101$ *pour*
***a)*** $(\ell,n) = (10135, 201)$ ***b)*** $(\ell,n) = (20562, 224)$ ***c)*** $(\ell,n) = (100123, 245)$ ***d)*** $(\ell,n) = (110428, 289)$

**Question à développer pendant l'oral 3** *Décrire l'algorithme que vous avez utilisé pour répondre à la question précédente. Évaluer sa complexité en fonction de la longueur $\ell$ de la suite.*

## 3 Plus longue sous-suite commune

Dans la suite du sujet, on considère des paires de suites finies $(\sigma_1, \sigma_2)$, de même longueur $\ell$, et l'on s'intéressera à leurs sous-suites communes vérifiant certaines propriétés. Cependant, les algorithmes que l'on développera seront toujours mis en œuvre sur des paires de suites du type $(\sigma, \Omega(\sigma))$. On pourra donc tirer parti des caractéristiques structurelles entre ces paires de suites, que l'on étudie à la question 4.

On définit la suite des indices de $\sigma_2$ en correspondance avec l'indice $i$ de $\sigma_1$ par

$$\mathrm{corresp}(\sigma_1, i, \sigma_2) = [\, j \mid \sigma_1(i) = \sigma_2(j)]$$

où les indices $j$ sont ordonnés de façon *décroissante*. On aura ainsi $\mathrm{corresp}([5,6,5,7,9], 0, [6,5,5,6,7,5]) = \mathrm{corresp}([5,6,5,7,9], 2, [6,5,5,6,7,5]) = [5,2,1]$.

On définit alors la suite réduite $\Pi(\sigma_1, \sigma_2)$ par concaténation des indices en correspondance

$$\Pi(\sigma_1, \sigma_2) = \mathrm{corresp}(\sigma_1, 0, \sigma_2), \ldots, \mathrm{corresp}(\sigma_1, |\sigma_1| - 1, \sigma_2)$$

On aura donc $\Pi([5,6,5,7,9], [6,5,5,6,7,5]) = [5,2,1,3,0,5,2,1,4]$.

Le nombre total d'indices en correspondance est noté $r(\sigma_1, \sigma_2)$, défini par

$$r(\sigma_1, \sigma_2) = |\Pi(\sigma_1, \sigma_2)| = \sum_{i=0}^{|\sigma_1|-1} |\mathrm{corresp}(\sigma_1, i, \sigma_2)|$$

**Question 4** *On pose $\sigma = \omega(\ell, n)$. Calculer $r(\sigma, \Omega(\sigma))$ pour*
***a)*** $(\ell, n) = (10, 505)$ ***b)*** $(\ell, n) = (100, 514)$ ***c)*** $(\ell, n) = (1000, 523)$ ***d)*** $(\ell, n) = (10000, 540)$

**Question à développer pendant l'oral 4** *Donner une borne supérieure de $r(\sigma_1, \sigma_2)$ en fonction de la longueur $\ell$ des suites $\sigma_1$ et $\sigma_2$.*

*Comparer ce pire cas avec les valeurs de $r(\sigma_1, \sigma_2)$ calculées à la question 4, qui fournit un échantillon représentatif du type de modifications que l'on souhaite étudier. Commenter.*
*(On pourra tester avec des suites plus grandes.)*

Une suite $\tau$ est une sous-suite commune à $\sigma_1$ et $\sigma_2$ si et seulement s'il existe des indices $i_0 < i_1 < \ldots < i_{|\tau|-1}$ et $j_0 < j_1 < \ldots < j_{|\tau|-1}$ tels que

$$\tau = [\sigma_1(i_0), \sigma_1(i_1), \ldots, \sigma_1(i_{|\tau|-1})] \quad \text{et} \quad \tau = [\sigma_2(j_0), \sigma_2(j_1), \ldots, \sigma_2(j_{|\tau|-1})]$$

On note $|\mathrm{LCS}(\sigma_1, \sigma_2)|$ la longueur d'une sous-suite commune à $\sigma_1$ et $\sigma_2$ *de longueur maximale.*

**Question à développer pendant l'oral 5** *Montrer que toute sous-suite croissante de $\Pi(\sigma_1, \sigma_2)$ induit une sous-suite commune à $\sigma_1$ et $\sigma_2$ de même longueur.*
*On admettra que, inversement, toute sous-suite commune à $\sigma_1$ et $\sigma_2$ induit une sous-suite croissante de $\Pi(\sigma_1, \sigma_2)$ de même longueur.*

On définit l'indice terminal du plus court préfixe de $\sigma_2$ ayant une sous-suite commune de longueur $k$ avec le préfixe $\sigma_1(0, i)$ de $\sigma_1$ par

$$\mathrm{SP}(i, k) = \begin{cases} \min \mathcal{E} & \text{si } \mathcal{E} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si } \mathcal{E} = \emptyset \end{cases} \qquad \text{pour } i, k \in [\![0, \ell]\!]$$
$$\text{avec } \mathcal{E} = \{ j \in [\![0, \ell]\!] \mid |\mathrm{LCS}(\sigma_1(0, i), \sigma_2(0, j))| = k \}$$

**Question à développer pendant l'oral 6** *Montrer que* $SP(i, k-1) < SP(i,k)$ *pour* $i \in [\![0, \ell]\!]$ *et* $k \in [\![1, \ell]\!]$. *(Par souci d'uniformité, on considère que* $+\infty < +\infty$*.)*

On définit la suite $(\mathrm{sp}(i,k))_{i \in [\![0,\ell]\!], k \in [\![0,\ell]\!]}$ par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{sp}(0,0) &= 0 \\
\mathrm{sp}(0,k) &= +\infty && \text{pour tout } k \in [\![1,\ell]\!] \\
\mathrm{sp}(i,0) &= 0 && \text{pour tout } i \in [\![1,\ell]\!] \\
\mathrm{sp}(i,k) &= \begin{cases} \min \mathcal{S} & \text{si } \mathcal{S} \neq \emptyset \\ \mathrm{sp}(i-1,k) & \text{si } \mathcal{S} = \emptyset \end{cases} && \text{pour tout } i \in [\![1,\ell]\!] \text{ et } k \in [\![1,\ell]\!]
\end{aligned}$$
$$\text{avec } \mathcal{S} = \{ j \in [\![1,\ell]\!] \mid \sigma_1(i-1) = \sigma_2(j-1) \wedge \mathrm{sp}(i-1,k-1) < j \leqslant \mathrm{sp}(i-1,k) \}$$

Dans la suite du sujet, on admettra que, pour tout $i, k \in [\![0, \ell]\!]$, on a $\mathrm{SP}(i,k) = \mathrm{sp}(i,k)$.

**Question 5** *On pose* $\sigma_1 = \omega(\ell, n)$ *et* $\sigma_2 = \Omega(\sigma_1)$.

*Calculer* $(\max\{k \in [\![0,\ell]\!] \mid SP(i,k) \neq +\infty\}) \bmod 101$ *pour*
***a)*** $(\ell, n, i) = (15, 601, 5)$ ***b)*** $(\ell, n, i) = (400986, 657, 102)$ ***c)*** $(\ell, n, i) = (500431, 678, 10502)$

**Question 6** *On pose* $\sigma = \omega(\ell, n)$. *Calculer* $|\mathrm{LCS}(\sigma, \Omega(\sigma))| \bmod 101$ *pour*
***a)*** $(\ell, n) = (305412, 732)$ ***b)*** $(\ell, n) = (700320, 745)$ ***c)*** $(\ell, n) = (1000812, 763)$

**Question à développer pendant l'oral 7** *Décrire l'algorithme que vous avez utilisé pour répondre à la question précédente. Évaluer sa complexité en fonction de* $r(\sigma_1, \sigma_2)$ *et de la longueur* $\ell$ *des suites fournies.*

## 4 Plus lourde sous-suites

On définit le poids de la position $i$ dans la suite $\sigma$ par

$$w(\sigma, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall 0 \leqslant k < i, \sigma(k) \neq \sigma(i) \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

et, par extension, on définit le poids d'une sous-suite $\tau = [\sigma(i_0), \ldots, \sigma(i_{|\tau|-1})]$ de $\sigma$ par

$$w(\tau) = \sum_{k=0}^{k<|\tau|} w(\sigma, i_k)$$

On note $w(\mathrm{HIS}(\sigma))$ le poids d'une sous-suite strictement croissante de $\sigma$ *de poids maximal.*

**Question 7** *Calculer* $w(\mathrm{HIS}(\omega(\ell, n))) \bmod 101$ *pour*
***a)*** $(\ell, n) = (10142, 401)$ ***b)*** $(\ell, n) = (20540, 428)$ ***c)*** $(\ell, n) = (30489, 465)$

**Question à développer pendant l'oral 8** *Décrire l'algorithme que vous avez utilisé pour répondre à la question précédente. Évaluer sa complexité en fonction de la longueur* $\ell$ *de la suite.*

On définit le poids d'une paire de positions $i$ (dans la suite $\sigma_1$) et $j$ (dans la suite $\sigma_2$) par

$$v(i,j) = \begin{cases} \ell - (i-j) & \text{si } i \geqslant j \\ \ell - (j-i) & \text{si } i < j \end{cases} \qquad\qquad \text{avec } \ell = |\sigma_1| = |\sigma_2|$$

et, par extension, on définit le poids d'une sous-suite $\tau$ commune à $\sigma_1$ et $\sigma_2$ (c'est-à-dire qu'il existe des indices $i_0 < \ldots < i_{|\tau|-1}$ et $j_0 < \ldots < j_{|\tau|-1}$ tels que pour tout $k \in [\![0, |\tau|[\![$, on a $\tau(k) = \sigma_1(i_k) = \sigma_2(j_k)$) par

$$v(\tau) = \sum_{k=0}^{k<|\tau|} v(i_k, j_k)$$

On note $v(\mathrm{HCS}(\sigma_1, \sigma_2))$ le poids d'une sous-suite commune à $\sigma_1$ et $\sigma_2$ *de poids maximal.*

**Question 8** *On pose* $\sigma = \omega(\ell, n)$. *Calculer* $v(\mathrm{HCS}(\sigma, \Omega(\sigma))) \bmod 101$ *pour*
***a)*** $(\ell, n) = (10156, 809)$ ***b)*** $(\ell, n) = (15129, 826)$ ***c)*** $(\ell, n) = (17845, 869)$

**Question à développer pendant l'oral 9** *Décrire l'algorithme que vous avez utilisé pour répondre à la question précédente. Évaluer sa complexité en fonction de* $r(\sigma_1, \sigma_2)$ *et de la longueur* $\ell$ *des suites fournies.*

On note $|\mathrm{HIS}(\sigma)|$ la longueur d'une sous-suite strictement croissante de $\sigma$ *de poids maximal* pour la fonction de poids $w(-)$ *et de longueur minimale.* De même, on note $|\mathrm{HCS}(\sigma_1, \sigma_2)|$ la longueur d'une sous-suite commune à $\sigma_1$ et $\sigma_2$ *de poids maximal* pour la fonction de poids $v(-)$ *et de longueur minimale.*

**Question 9** *Calculer* $|\mathrm{HIS}(\omega(\ell, n))| \bmod 101$ *pour*
***a)*** $(\ell, n) = (10378, 801)$ ***b)*** $(\ell, n) = (20432, 832)$ ***c)*** $(\ell, n) = (30654, 827)$

**Question 10** *On pose* $\sigma = \omega(\ell, n)$. *Calculer* $|\mathrm{HCS}(\sigma, \Omega(\sigma))| \bmod 101$ *pour*
***a)*** $(\ell, n) = (10289, 804)$ ***b)*** $(\ell, n) = (14912, 823)$ ***c)*** $(\ell, n) = (18142, 892)$

**Question à développer pendant l'oral 10** *En exploitant les résultats présentés dans ce sujet, proposer un algorithme permettant de calculer une plus longue sous-suite commune à* $n > 2$ *suites. Conjecturer sa complexité dans le pire cas.*

# Fiche réponse type: Sous-suites

$\widetilde{u_0}$ : 42

**Question 1**

a) 62

b) 0

c) 35

**Question 2**

a) 77

b) 96

c) 28

**Question 3**

a) 95

b) 70

c) 21

d) 37

**Question 4**

a) 15

b) 228

c) 2041

d) 19825

**Question 5**

a) 3

b) 21

c) 79

**Question 6**

a) 33

b) 16

c) 86

**Question 7**

a) 85

b) 52

c) 84

**Question 8**

a) 26

b) 9

c) 66

**Question 9**

a) 63

**b)** 42

**c)** 99

**Question 10**

**a)** 81

**b)** 33

**c)** 61

# Fiche réponse: Sous-suites

**Nom, prénom, $u_0$:** ..........................................................

**Question 1**

a)

b)

c)

**Question 2**

a)

b)

c)

**Question 3**

a)

b)

c)

d)

**Question 4**

a)

b)

c)

d)

**Question 5**

a)

b)

c)

**Question 6**

a)

b)

c)

**Question 7**

a)

b)

c)

**Question 8**

a)

b)

c)

**Question 9**

a)

b)

c)

**Question 10**

a)

b)

c)