Réseaux de comparateurs

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2017

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Il vous a été donné un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***.
Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

FIGURE 1 – Un comparateur et un réseau de comparateurs.

Introduction

Un comparateur est un composant qui permet d'obtenir le plus petit et le plus grand des deux nombres a et b donnés en entrée. Un réseau de comparateurs est un assemblage de comparateurs, connectés entre eux par des fils, et comportant le même nombre n d'entrées et de sorties. On peut visualiser un réseau de comparateurs en utilisant la notation de Knuth. Les entrées et sorties sont schématisées par les extremités gauches et droites de lignes horizontales. Les comparateurs utilisés dans le réseau correspondent à des lignes verticales reliant les lignes horizontales qu'ils comparent, dans l'ordre dans lequel ils interviennent dans le réseau.

L'intérêt des réseaux de comparateurs est de permettre une implémentation matérielle efficace de certains algorithmes à bases de comparaisons, notamment la recherche du plus grand élément dans une liste, le tri d'une liste, etc. Deux facteurs sont prépondérants pour mesurer la pertinence d'un réseau de comparateurs : son coût, que l'on considérera proportionnel au nombre de comparateurs, et le temps nécessaire pour calculer toutes les sorties du réseau, proportionnel à la profondeur du réseau (définie plus loin).

Le but du sujet est d'étudier ces différentes questions et de mettre en oeuvre des réseaux de comparateurs classiques. Dans la première partie, on met en place un générateur pseudo-aléatoire, dans la deuxième partie on s'intéresse à l'évaluation du temps de calcul d'un réseau de comparateurs. Dans la troisième partie on introduit le principe du 0/1, et dans les deux dernières parties on étudie deux constructions de réseaux de tri basées sur une stratégie *diviser pour régner*.

1 Générateur pseudo-aléatoire

Si $a \geq 0$ et $b > 0$ sont deux entiers, on note $a \mod b$ le reste de la division euclidienne de a par b, autrement dit l'unique entier r avec $0 \leq r < b$ tel qu'il existe un entier q satisfaisant $a = bq + r$. On note $[\![i, j]\!] = \{i, i+1, \ldots, j\}$ l'ensemble des entiers compris entre i et j inclus.

Soit u_0 indiqué sur votre feuille (à reporter sur votre fiche réponse). On fixe pour tout le sujet

$$M = 1\,073\,741\,783,$$

et l'on définit une suite $(u(k))_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$u(0) = u_0, \qquad u(k+1) = \big(42u(k) + 17\big) \mod M.$$

Question 1 *Calculer $u(k)$ mod $1\,000$ pour les valeurs de k suivantes :*

a) $k = 5$ ***b)*** $k = 10\,000$ ***c)*** $k = 2\,000\,000$.

On note $u_{<n}$ la suite d'entiers de longueur n telle que $u_{<n} = (u(0), \dots, u(n-1))$.

Soit E un ensemble. Pour toute suite v d'élements de E de longueur n, avec $v = (v_0, \dots, v_{n-1}) \in E^n$, on note $\widetilde{v}$ la suite $(v_{\sigma(0)}, \dots, v_{\sigma(n-1)}) \in E^n$ où $\sigma(i) = u(i) \bmod n$.

Question 2 *Calculer* $\left(\sum_{i=0}^{k-1} v_i\right) \bmod 1\,000$ *pour* $(v_0, \dots, v_{k-1}) = \widetilde{u_{<k}}$ *et*

a) $k = 5$ ***b)*** $k = 10\,000$ ***c)*** $k = 2\,000\,000$.

2 Réseaux de comparateurs

On note $\langle i, j\rangle$ le comparateur reliant les lignes i à j, et, pour tout $n \geq 2$, on introduit l'ensemble Σ_n des comparateurs à n entrées défini comme $\Sigma_n = \{\langle i, j\rangle\}_{0\leq i<j<n}$.

On appelle réseau de comparateurs à n entrées un mot sur l'alphabet Σ_n. La taille $\mathsf{size}(\mathcal{N})$ du réseau de comparateurs $\mathcal{N}$ est la longueur du mot $\mathcal{N}$. On note $\mathcal{N} ; \mathcal{N}'$ la composition séquentielle de deux réseaux, définie comme la concaténation de mots. Enfin, on notera $\mathcal{N}_{<k}$ le réseau $\langle i_0, j_0\rangle ; \langle i_1, j_1\rangle; \dots ; \langle i_{k-1}, j_{k-1}\rangle$ de taille k pour tout $k \in [\![1, \mathsf{size}(\mathcal{N})]\!]$.

Étant donné un vecteur $I \in \mathbb{N}^n$ et un réseau $\mathcal{N} \in \Sigma_n^*$ à n entrées, la sortie $\mathcal{N}(I) \in \mathbb{N}^n$ de $\mathcal{N}$ sur l'entrée I est définie par récurrence sur la taille de $\mathcal{N}$:

- si $\mathcal{N}$ est le mot vide, on pose $\mathcal{N}(I) = I$;
- si $\mathcal{N} = \langle i, j\rangle$ avec $0 \leq i < j < n$, on pose $\mathcal{N}(I) = O$ où $O_i = \min(I_i, I_j)$, $O_j = \max(I_i, I_j)$, et $O_k = I_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!] \setminus \{i, j\}$;
- si $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 ; \mathcal{N}_2$, on pose $\mathcal{N}(I) = \mathcal{N}_2(\mathcal{N}_1(I))$.

Enfin, on notera $\mathcal{N}(I)[k]$ la sortie d'indice k du réseau $\mathcal{N}$ sur l'entrée I, autrement dit $\mathcal{N}(I)[k] = O_k$ où $O = \mathcal{N}(I)$.

Par exemple, si $I = (2, 1, 0, 3)$ et $\mathcal{N} = \langle 0, 1\rangle ; \langle 2, 3\rangle ; \langle 0, 2\rangle ; \langle 1, 3\rangle$ est le réseau à 4 entrées de taille 4 représenté à droite sur la figure 1, on a $\mathcal{N}(I) = (0, 2, 1, 3)$ et $\mathcal{N}(I)[1] = 2$.

Question à développer pendant l'oral 1 *Proposer un algorithme pour calculer $\mathcal{N}(I)$. Quelle est sa complexité ? On donnera une réponse de la forme $\mathcal{O}(f(n, m))$ où n est le nombre d'entrées, m la taille $\mathcal{N}$, et f une fonction à déterminer.*

La cascade de comparateurs de taille m à n entrées est le réseau de comparateurs

$$\mathsf{cascade}(n, m) = \langle 0, 1\rangle ; \langle 1, 2\rangle; \dots ; \langle k \bmod n, (k+1) \bmod n\rangle; \dots ; \langle (m-1) \bmod n, m \bmod n\rangle$$

où les éventuels $\langle n-1, 0\rangle$ doivent se comprendre comme les comparateurs $\langle 0, n-1\rangle$.

Un réseau de comparateurs $\mathcal{N}$ à n entrées est un réseau de tri si pour tout $I \in \mathbb{N}^n$,

$$\mathcal{N}(I)[0] \leq \mathcal{N}(I)[1] \leq \dots \leq \mathcal{N}(I)[n-1].$$

Question à développer pendant l'oral 2 *Pour quelles valeurs de m le réseau de comparateurs* $\mathsf{cascade}(3, m)$ *est-il un réseau de tri ?*

On notera $\widetilde{\mathsf{cascade}}(n, m)$ le réseau $\widetilde{\mathcal{N}}$ où $\mathcal{N} = \mathsf{cascade}(n, m)$.

Question 3 *Calculer* $\widetilde{\mathsf{cascade}}(n,m)(u_{<n})[\ell]$ *pour les valeurs de* ℓ, n, m *suivantes :*

a) $\ell = 5$, $n = 10$, $m = 10$ ***b)*** $\ell = 100$, $n = 300$, $m = 3\,000$
c) $\ell = 500$, $n = 1\,000$, $m = 1\,000\,000$.

On donnera les valeurs calculées modulo $1\,000$.

Soit $\mathcal{N} \in \Sigma_n^*$ un réseau de comparateurs à n entrées de taille $\mathsf{size}(\mathcal{N}) = m$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on définit le temps de calcul de la sortie k pour le réseau $\mathcal{N}$, noté $\mathsf{delay}(\mathcal{N}, k)$, par récurrence sur la taille de $\mathcal{N}$ comme suit :

— si $\mathcal{N}$ est le mot vide, on pose $\mathsf{delay}(\mathcal{N}, k) = 0$,

— sinon $\mathcal{N} = \mathcal{N}' \,;\, \langle i, j\rangle$ et on pose

$$\mathsf{delay}(\mathcal{N}, k) = \begin{cases} \mathsf{delay}(\mathcal{N}', k) & \text{si } k \notin \{i, j\} \\ 1 + \max\left(\mathsf{delay}(\mathcal{N}', i), \mathsf{delay}(\mathcal{N}', j)\right) & \text{si } k \in \{i, j\} \end{cases}$$

Par exemple, si $\mathcal{N} = \langle 0, 1\rangle \,;\, \langle 2, 3\rangle \,;\, \langle 0, 2\rangle \,;\, \langle 1, 3\rangle$ est le réseau de la figure 1, on a $\mathsf{delay}(\mathcal{N}, k) = 2$ pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$.

Question 4 *Pour les valeurs de* k, n, m *suivantes, calculer* $\mathsf{delay}(\widetilde{\mathsf{cascade}}(n,m), k)$ *mod* $1\,000$ *:*

a) $k = 5$, $n = 10$, $m = 10$ ***b)*** $k = 100$, $n = 300$, $m = 3\,000$
c) $k = 500$, $n = 1\,000$, $m = 1\,000\,000$.

Pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, la couche du comparateur d'indice k dans le réseau $\mathcal{N}$, notée $\mathsf{layer}(\mathcal{N}, k)$, est le temps de calcul des sorties de ce comparateur, *i.e.*

$$\mathsf{layer}(\mathcal{N}, k) = \mathsf{delay}(\mathcal{N}_{<k+1}, i_k) = \mathsf{delay}(\mathcal{N}_{<k+1}, j_k)$$

où $\mathcal{N} = \langle i_0, j_0\rangle; \ldots; \langle i_{m-1}, j_{m-1}\rangle$. La profondeur d'un réseau $\mathcal{N}$ de taille m, notée $\mathsf{depth}(\mathcal{N})$, est le nombre de couches de $\mathcal{N}$, *i.e.*

$$\mathsf{depth}(\mathcal{N}) = \sharp\{\mathsf{layer}(\mathcal{N}, k) \mid k \in [\![0, m-1]\!]\}$$

où $\sharp S$ dénote le cardinal de l'ensemble S. Par exemple, si $\mathcal{N} = \langle 0, 1\rangle \,;\, \langle 2, 3\rangle \,;\, \langle 0, 2\rangle \,;\, \langle 1, 3\rangle$ est le réseau de la figure 1, on a $\mathsf{layer}(\mathcal{N}, k) = 1 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$, et $\mathsf{depth}(\mathcal{N}) = 2$.

Question 5 *Pour les valeurs de* n, m *suivantes, calculer* $\mathsf{depth}(\widetilde{\mathsf{cascade}}(n,m))$ *:*

a) $n = 10$, $m = 100$ ***b)*** $n = 100$, $m = 1\,000$
c) $n = 1\,000\,000$, $m = 10\,000\,000$.

On donnera les valeurs calculées modulo $1\,000$.

Soit $\mathcal{N}$ un réseau de comparateurs de taille m. Pour deux entiers $k, \ell \in [\![0, m-1]\!]$, on définit

$$k \leq_{\mathcal{N}} \ell \qquad \text{si} \qquad (\mathsf{layer}(\mathcal{N}, k), i_k, j_k) \leq_{\mathsf{lex}} (\mathsf{layer}(\mathcal{N}, \ell), i_\ell, j_\ell)$$

où $\leq_{\mathsf{lex}}$ dénote l'ordre lexicographique. Ainsi, $\leq_{\mathcal{N}}$ définit un ordre total sur $[\![0, m-1]\!]$. Soit σ l'unique permutation de $[\![0, m-1]\!]$ telle que $\sigma(0) \leq_{\mathcal{N}} \sigma(1) \leq_{\mathcal{N}} \cdots \leq_{\mathcal{N}} \sigma(m-1)$. On pose

$$\mathsf{canon}(\mathcal{N}) = \langle i_{\sigma(0)}, j_{\sigma(0)}\rangle; \ldots; \langle i_{\sigma(m-1)}, j_{\sigma(m-1)}\rangle.$$

Par exemple, si $\mathcal{N} = \langle 0, 1\rangle \,;\, \langle 0, 1\rangle \,;\, \langle 2, 3\rangle$, on a $0 \leq_{\mathcal{N}} 2 \leq_{\mathcal{N}} 1$ et $\mathsf{canon}(\mathcal{N}) = \langle 0, 1\rangle \,;\, \langle 2, 3\rangle \,;\, \langle 0, 1\rangle$.

Question 6 *Pour les valeurs de k, n, m suivantes, calculer* $\mathsf{layer}(\mathcal{N}_{n,m}, c_m(k))$ *où* $\mathcal{N}_{n,m}$ *désigne le réseau* $\mathsf{canon}(\mathsf{cascade}(n, m))$ *et* $c_m(k) = u(k)$ *mod* m.

a) $k = 5$, $n = 10$, $m = 10$ ***b)*** $k = 10$, $n = 20$, $m = 100$
c) $k = 15$, $n = 30$, $m = 1\,000\,000$.

On donnera les valeurs calculées modulo $1\,000$.

Le réseau $\mathcal{N}$ à n entrées est correct sur la sortie k ($k \in [\![0, n-1]\!]$) si pour tout entrée $I \in \mathbb{N}^n$, $\mathcal{N}(I)[k] = \mathcal{N}^{\mathsf{tri}}(I)[k]$ pour un réseau de tri $\mathcal{N}^{\mathsf{tri}}$ quelconque.

Question à développer pendant l'oral 3 *Montrer que, pour tout* $N \geq 1$, *il existe un réseau de comparateurs* Min_N *à* 2^N *entrées de profondeur* N *et de taille* $2^N - 1$ *qui est correct sur la sortie* 0. *Justifier que cette profondeur et cette taille sont optimales.*

Question 7 *Soit* $\mathcal{N}_N = \mathsf{canon}(\mathsf{Min}_N)$, *où* Min_N *est un réseau de comparateurs répondant à la question d'oral précédente. Pour les valeurs de k et N ci-dessous, calculer* $\max\limits_{k \leq \ell < 2k} \mathsf{layer}(\mathcal{N}_N, c_N(\ell))$ *où* $c_N(\ell) = \big(u(\ell) \cdot (u(l) + 1)\big)$ *mod* $(2^N - 1)$.

a) $k = 10$, $N = 10$ ***b)*** $k = 100$, $N = 20$ ***c)*** $k = 1\,000$, $N = 40$.

3 Principe du $0/1$.

Déterminer si un réseau de comparateurs $\mathcal{N}$ donné est un réseau de tri est un problème algorithmique difficile, qui n'admet vraisemblablement que des solutions en temps exponentiel. Un algorithme naïf consisterait à énumérer toutes les entrées I de taille n et à valeurs dans $[\![0, n-1]\!]$, où n est le nombre d'entrées de $\mathcal{N}$, et de vérifier que $\mathcal{N}(I)$ est trié pour chaque I. En fait, on peut faire un petit peu mieux, en utilisant la proposition suivante.

Proposition 1 (Principe du $0/1$) *Un réseau de comparateurs $\mathcal{N}$ à n entrées est un réseau de tri si et seulement si pour tout $I \in \{0,1\}^n$, $\mathcal{N}(I)$ est trié.*

Question à développer pendant l'oral 4 *Démontrer le principe du $0/1$, et expliquer en quoi il donne un algorithme de reconnaissance de réseaux de tri plus efficace que celui mentionné ci-dessus.*

Indication : on pourra commencer par démontrer que pour tout réseau $\mathcal{N}$ à n entrées et pour toute fonction croissante $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a l'égalité $\hat{f}(\mathcal{N}(I)) = \mathcal{N}(\hat{f}(I))$, où $\hat{f} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$ désigne la fonction qui applique f à chaque élément du vecteur, i.e. $\hat{f}(I) = O$ où $O_k = f(I_k)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Un ensemble d'entrées $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}^n$ teste la sortie k si pour tout réseau $\mathcal{N}$ à n entrées, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{N}$ est correct sur la sortie k, et
2. pour tout $I \in \mathcal{I}$, $\mathcal{N}(I)[k] = \mathcal{N}^{\mathsf{tri}}(I)[k]$ pour un réseau de tri $\mathcal{N}^{\mathsf{tri}}$ quelconque.

En particulier, quelque soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, l'ensemble $\mathbb{N}^n$ de toutes les entrées de taille n teste la sortie k.

Question à développer pendant l'oral 5 *Définir un ensemble $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}^n$ testant la sortie 1 (celle qui renvoie le 2-ème plus petit élément) dont le cardinal $|\mathcal{I}|$ est en $\mathcal{O}(p(n))$ pour un polynôme p à déterminer.*

Question 8 *Pour les valeurs de n suivantes, calculer le plus petit m tel que $\widetilde{\mathsf{cascade}}(n, m)$ est correct sur la sortie 1 (autrement dit renvoie le deuxième plus petit élément sur cette sortie).*

a) $n = 5$ ***b)*** $n = 20$ ***c)*** $n = 30$.

4 Réseau de tri de Batcher

On s'intéresse maintenant à la réalisation de réseaux de tri basés sur le principe dit de *diviser pour régner*. Soit $I = (I_0, \ldots, I_{2n-1})$ un vecteur de $2n$ entiers dont les deux moitiés sont déjà triées, *i.e.* $I_k \leq I_{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!] \cup [\![n, 2n-2]\!]$; on dira que I est <u>fusionnable</u>. Par exemple, $(1, 3, 5, 8, 1, 2, 4, 6)$ est fusionnable. Un réseau $\mathcal{N}$ à $2n$ entrées est un <u>fusionneur</u> si pour tout $I \in \mathbb{N}^{2n}$ fusionnable, $\mathcal{N}(I)$ est trié.

On s'intéresse donc à la construction d'un fusionneur efficace réalisable par un réseau de comparateurs. Notez que l'algorithme de tri fusion n'est pas réalisable par un réseau de comparateurs, car son déroulement dépend du résultat des comparaisons intermédiaires. On cherche donc d'autres méthodes pour concevoir un fusionneur.

On s'intéresse dans cette partie au fusionneur de Batcher. Le principe de ce fusionneur consiste à trier les entrées d'indices pairs et impairs séparément et en place avant de leur appliquer une ultime couche de comparateurs. Pour $I = (I_0, \ldots, I_{2n-1}) \in \mathbb{N}^{4n}$, on note $\mathsf{BATCHER}_{4n}(I) = (O_0, \ldots, O_{4n-1}) \in \mathbb{N}^{4n}$ le vecteur d'entiers tel que $(O_0, O_2, \ldots, O_{4n-2})$ est le tri de $(I_0, I_2, \ldots, I_{4n-2})$ et $(O_1, O_3, \ldots, O_{4n-1})$ est le tri de $(I_1, I_3, \ldots, I_{4n-1})$. Par exemple,

$$\mathsf{BATCHER}_8(1, 3, 5, 8, 1, 2, 4, 6) = (1, 2, 1, 3, 4, 6, 5, 8).$$

Proposition 2 (Principe de Batcher) *Si $I = (I_0, \ldots, I_{4n-1}) \in \mathbb{N}^{4n}$ est fusionnable, et si $\mathsf{BATCHER}_{4n}(I) = (O_0, \ldots, O_{4n-1}) \in \mathbb{N}^{4n}$, alors $O_{2k} \leq O_{2k+1}$ pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$.*

Question à développer pendant l'oral 6 *Démontrer le principe de Batcher. En déduire un réseau de comparateurs $\mathcal{W}_{4n}$ à $4n$ entrées, de profondeur 1, et de taille $2n-1$, tel que pour tout $I \in \mathbb{N}^{4n}$ fusionnable, $\mathcal{W}_{4n}(\mathsf{BATCHER}_{4n}(I))$ est trié.*

<u>Indication :</u> *on pourra commencer par montrer pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ l'inégalité*

$$\sharp\{\ell \in [\![0, 2n-1]\!] \mid I_{2\ell} \leq O_{2k+1}\} \quad \geq \quad \sharp\{\ell \in [\![0, 2n-1]\!] \mid I_{2\ell+1} \leq O_{2k+1}\}.$$

En utilisant le principe de Batcher, on peut construire par récurrence pour tout $N \geq 1$ un fusionneur $\mathsf{BatcherFusion}_N$ à $n = 2^N$ entrées à partir de fusionneurs à $n/2$ entrées. Par exemple, $\mathsf{BatcherFusion}_2$ et $\mathsf{BatcherFusion}_3$ correspondent aux réseaux représentés figure 2.

On note $\mathcal{N}^{-1}$ le réseau image miroir de $\mathcal{N}$, défini comme $\mathcal{N}^{-1} = \langle i_{m-1}, j_{m-1} \rangle$; $\langle i_{m-2}, j_{m-2} \rangle; \ldots; \langle i_0, j_0 \rangle$ lorsque $\mathcal{N} = \langle i_0, j_0 \rangle$; $\langle i_1, j_1 \rangle; \ldots; \langle i_{m-1}, j_{m-1} \rangle$.

Question 9 *Soit $\mathcal{N}_N$ le réseau à 2^N entrées tel que $\mathcal{N}_N^{-1} = \mathsf{BatcherFusion}_N$. Calculer $\mathcal{N}_N(u_{<2^N})[\ell]$ pour les valeurs de ℓ et N suivantes :*

a) $\ell = 5$, $N = 6$ ***b)*** $\ell = 6$, $N = 11$ ***c)*** $\ell = 10$, $N = 20$.

On donnera les valeurs calculées modulo 1 000.

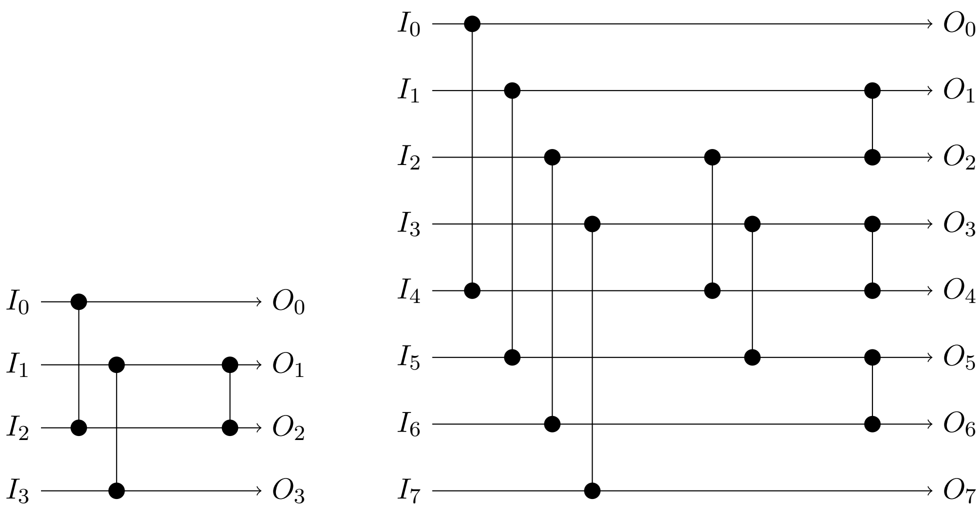

FIGURE 2 – Les réseaux $\mathsf{BatcherFusion}_2$ et $\mathsf{BatcherFusion}_3$

Question à développer pendant l'oral 7 *Quelles sont la taille et la profondeur du fusionneur* $\mathsf{BatcherFusion}_N$ *pour* $n = 2^N$ *? On donnera une réponse de la forme* $\mathcal{O}(f(n))$.

En utilisant le fusionneur de Batcher, on peut construire de manière récursive un réseau de tri $\mathsf{BatcherSort}_N$ à $n = 2^N$ entrées comme suit :

$\mathsf{BatcherSort}_1 = \langle 0, 1 \rangle$ et $\mathsf{BatcherSort}_{N+1} = \mathsf{BatcherSort}_N;\mathsf{shift}_N(\mathsf{BatcherSort}_N);\mathsf{BatcherFusion}_{N+1}$

où $\mathsf{shift}_N(\langle i_0, j_0 \rangle; \dots; \langle i_{m-1}, j_{m-1} \rangle) = \langle i_0 + 2^N, j_0 + 2^N \rangle; \dots; \langle i_{m-1} + 2^N, j_{m-1} + 2^N \rangle$.

Question 10 *Calculer* $\mathsf{size}(\mathsf{BatcherSort}_N)$ *et* $\mathsf{depth}(\mathsf{BatcherSort}_N)$ *pour les valeurs de* N *suivantes :*

a) $N = 4 + (u(5) \ mod \ 5)$ ***b)*** $N = u(100) \ mod \ 1\,000$ ***c)*** $N = u(1\,000) \ mod \ 10\,000$.

On donnera les valeurs calculées modulo $1\,000$.

5 Réseau de tri bitonique

On s'intéresse maintenant à une autre méthode de fusion appellée fusion bitonique. Un vecteur $I \in \{0,1\}^n$ est dit bitonique si le mot $I_0 I_1 \dots I_{n-1}$ appartient à $0^*1^*0^* + 1^*0^*1^*$, autrement dit s'il existe au plus deux indices $i, j \in [\![0, n-2]\!]$ tels que $I_i \neq I_{i+1}$ et $I_j \neq I_{j+1}$. Pour tout $n \geq 1$, soit $\mathcal{B}_{2n}$ le réseau à $2n$ entrées, de taille n, et de profondeur 1 tel que

$$\mathcal{B}_{2n} = \langle 0, n \rangle; \dots; \langle k, n+k \rangle; \dots; \langle n-1, 2n-1 \rangle.$$

Proposition 3 (Principe de fusion bitonique) *Soit* $I \in \{0,1\}^{2n}$ *un vecteur bitonique,* $O = \mathcal{B}_N(I)$, $O^{(low)} = (O_0, O_1, \dots, O_{n-1})$ *et* $O^{(high)} = (O_n, O_{n+1}, \dots, O_{2n-1})$. *Alors l'un des cas suivants se présente*

— $O^{(low)} = (0, 0, \dots, 0)$ *et* $O^{(high)}$ *est bitonique, ou alors*

— $O^{(high)} = (1, 1, \dots, 1)$ *et* $O^{(low)}$ *est bitonique.*

Question à développer pendant l'oral 8 *Démontrer le principe de fusion bitonique.*

Soit $\mathsf{Sort}_N^{\mathcal{B}}$ le réseau tel que

$$\mathsf{Sort}_1^{\mathcal{B}} = \langle 0, 1\rangle \qquad \text{et} \qquad \mathsf{Sort}_{N+1}^{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{N+1}\,;\mathsf{Sort}_N^{\mathcal{B}}\,;\mathsf{shift}_N(\mathsf{Sort}_N^{\mathcal{B}}) \qquad \text{pour tout } N \geq 1.$$

En appliquant le principe de fusion bitonique, on peut montrer que pour toute entrée bitonique $I \in \{0,1\}^{2^N}$, la sortie $\mathsf{Sort}_N^{\mathcal{B}}(I)$ est triée.

Question à développer pendant l'oral 9 *Donner pour tout $N \geq 1$ et $n = 2^N$ un réseau $\mathcal{C}_N$ de profondeur 1 tel que le réseau*

$$\mathsf{BitonicFusion}_{N+1} = \mathcal{C}_{N+1}\,;\mathsf{Sort}_N^{\mathcal{B}}\,;\mathsf{shift}_N(\mathsf{Sort}_N^{\mathcal{B}}).$$

soit un fusionneur, i.e. pour tout entrée $I \in \{0,1\}^n$ fusionnable, $\mathsf{BitonicFusion}_N(I)$ est trié.

On en déduit le réseau de tri $\mathsf{BitonicSort}_N$ à $n = 2^N$ entrées défini comme

$$\mathsf{BitonicSort}_{N+1} = \mathsf{BitonicSort}_N\,;\mathsf{shift}_N(\mathsf{BitonicSort}_N)\,;\mathsf{BitonicFusion}_{N+1}.$$

Question 11 *Soit $\mathcal{N}_N$ tel que $\mathcal{N}_N^{-1} = \mathsf{BitonicSort}_N$. Calculer $\mathcal{N}_N(u_{<2^N})[\ell]$ pour les valeurs de ℓ et N suivantes :*

a) $\ell = 5,\ N = 6$ ***b)*** $\ell = 5,\ N = 10$ ***c)*** $\ell = 10,\ N = 15$.

On donnera les valeurs calculées modulo 1 000.

Fiche réponse type: Réseaux de comparateurs

$\widetilde{u_0}$ **: 42**

Question 1

a) 876

b) 736

c) 974

Question 2

a) 908

b) 343

c) 907

Question 3

a) 876

b) 25

c) 536

Question 4

a) 2

b) 37

c) 37

Question 5

a) 36

b) 43

c) 63

Question 6

a) 2

b) 14

c) 380

Question 7

a) 4

b) 5

c) 13

Question 8

a) 26

b) 302

c) 705

Question 9

a) 876

b) 189

c) 57

Question 10

a) 191, 15

b) 847, 953

c) 367, 300

Question 11

a) 131

b) 278

c) 282

Fiche réponse: Réseaux de comparateurs

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)

Question 5

a)

b)

c)

Question 6

a)

b)

c)

Question 7

a)

b)

c)

Question 8

a)

b)

c)

Question 9

a)

b)

c)

Question 10

a)

b)

c)

Question 11

a)

b)

c)