Marches à petits pas dans le quart de plan

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2017

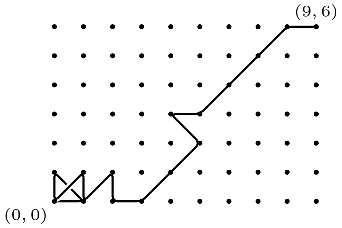
ATTENTION !

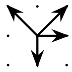
N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Il vous a été donné un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***.
Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.



$\mathcal{E} =$ 

(0, 0), (1, 0), (0, 1), (0, 0), (1, 1), (1, 0), (2, 1), (2, 0), (3, 0), (4, 1), (5, 2), (4, 3), (5, 3), (6, 4), (7, 5), (8, 6), (9, 6)

FIGURE 1 – Une marche $(a_0, \dots, a_n)$ peut se dessiner comme une ligne brisée démarrant en $a_0 = (0, 0)$ et aboutissant en a_n. Ici, une marche de longueur 16 à pas dans $\mathcal{E}$.

Si a et $b \neq 0$ sont deux entiers, même négatifs, on note $a \bmod b$ l'unique entier r avec $0 \leqslant r < b$ tel qu'il existe un entier q satisfaisant $a = bq + r$.

On fixe pour tout le sujet

$$m = 1\,073\,741\,783,$$

et l'on définit une suite $(u(k))_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$u(0) = u_0, \qquad u(k+1) = \big(42u(k) + 17\big) \bmod m.$$

Question 1 *Calculer* $u(k) \bmod 1\,000$ *pour* ***a)*** $k = 5$ ***b)*** $k = 10\,000$ ***c)*** $k = 2\,000\,000$.

1 Exemples de marches

Une marche à petits pas dans le quart de plan, ou simplement marche dans la suite, est une suite finie $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^{n+1}$ où $a_0 = (0, 0)$ et

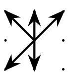
$$a_{k+1} - a_k \in \mathcal{R} = (\{-1; 0; 1\} \times \{-1; 0; 1\}) \setminus \{(0, 0)\}$$

pour $0 \leqslant k < n$. Autrement dit, la marche démarre à l'origine et l'on passe d'une position à la suivante en se déplaçant vers un des huit points à coordonnées entières voisins, sans quitter le quart de plan nord-est (voir figure 1).

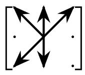
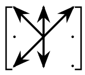
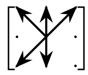
La différence $a_{k+1} - a_k$ est appelée pas d'indice k. Le nombre n de pas est la longueur de la marche, et le point a_n son arrivée.

Question à développer pendant l'oral 1 *Donner toutes les marches de longueur* 3 *arrivant en* $(0, 0)$.

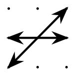
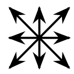
Dans ce qui suit, on s'intéressera à des marches $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ dont les pas sont pris dans un sous-ensemble non vide donné $\mathcal{P}$ de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire que l'on a $a_{k+1} - a_k \in \mathcal{P}$ pour $0 \leqslant k < n$. Une marche satisfaisant cette contrainte est appelée une $\mathcal{P}$-marche. On représentera les pas par des flèches et les sous-ensembles de $\mathcal{R}$ par des diagrammes comportant une flèche pour chaque pas, par exemple

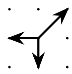
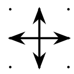
 $= \{\nearrow, \uparrow, \nwarrow, \swarrow, \downarrow\} = \{(1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, -1), (0, -1)\}.$

Étant donné un tel ensemble $\mathcal{P}$, on note $[\mathcal{P}]_0, [\mathcal{P}]_1, \ldots$ les éléments de $\mathcal{P}$ parcourus de façon répétée dans le sens trigonométrique en commençant dans la direction $\rightarrow$, c'est-à-dire dans l'ordre $(1,0), (1,1), (0,1), (-1,1), (-1,0), (-1,-1), (0,-1), (1,-1)$. On a par exemple

 $_0 = \nearrow,$  $_3 = \swarrow,$  $_{11} = \uparrow.$

Nous utiliserons notamment les ensembles de pas suivants :

$\mathcal{G} =$  (marches de Gessel), $\mathcal{R} =$  (marches du roi),

$\mathcal{K} =$  (marches de Kreweras), $\mathcal{T} =$  (marches de la tour),

et

$$\mathcal{U}(k) = \{[\mathcal{R}]_{u(k)}, [\mathcal{R}]_{u(k+1)}, \ldots, [\mathcal{R}]_{u(k+6)}\}.$$

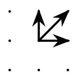
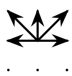
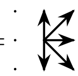
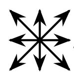
Question 2 *Calculer le nombre d'entiers $h < \ell$ tels que $[\mathcal{P}]_{u(h)} = [\mathcal{P}]_{u(\ell)}$ lorsque :*

a) $\mathcal{P} = \mathcal{K}$, $\ell = 10$, ***b)*** $\mathcal{P} = \mathcal{G}$, $\ell = 2\,000\,000$.

On donnera ce nombre modulo $1\,000$.

Question 3 *Dessiner $\mathcal{U}(k)$ et $[\mathcal{U}(k)]_{17}$ pour* ***a)*** $k = 0$, ***b)*** $k = 10$, ***c)*** $k = 20$.

Lorsque $i, j \geqslant 1$, on pose

$\mathcal{V}(0,0) =$  $\mathcal{V}(i,0) =$  $\mathcal{V}(0,j) =$  $\mathcal{V}(i,j) =$ .

Pour tout $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$ contenant $\rightarrow$, $\nearrow$ ou $\uparrow$ et tous $s, n \in \mathbb{N}$, on définit $B(\mathcal{P}, s, n) = (b_0, \ldots, b_n)$ par

$$b_0 = (0,0), \qquad b_{k+1} = b_k + [\mathcal{P} \cap \mathcal{V}(b_k)]_{u(s+k)}.$$

La figure 1 représente $B(\mathcal{E}, 0, 16)$ pour $u_0 = \tilde{u}_0$ et l'ensemble de pas $\mathcal{E}$ indiqué.

Question à développer pendant l'oral 2 *Justifier que $B(\mathcal{P}, s, n)$ est toujours une marche.*

Question 4 *Déterminer les arrivées des marches :* ***a)*** $B(\mathcal{R}, 0, 10)$, ***b)*** $B(\mathcal{G}, 0, 10)$, ***c)*** $B(\mathcal{R}, 0, 1\,000\,000)$, ***d)*** $B(\mathcal{G}, 0, 1\,000\,000)$. *On donnera les coordonnées modulo* $1\,000$.

Si $A = (a_0, \ldots, a_n)$ est une marche, on définit

$$d(A) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|a_k\| \qquad \text{où} \qquad \|(i,j)\| = i + j.$$

Question 5 *Calculer la moyenne des $d(B(\mathcal{P}, s\,n, n))$ pour $0 \leqslant s < 100$ lorsque :*

a) $\mathcal{P} = \mathcal{K}$ *et* $n = 10$, ***b)*** $\mathcal{P} = \mathcal{G}$ *et* $n = 12$, ***c)*** $\mathcal{P} = \mathcal{T}$ *et* $n = 14$,
d) $\mathcal{P} = \mathcal{K}$ *et* $n = 100\,000$, ***e)*** $\mathcal{P} = \mathcal{G}$ *et* $n = 100\,000$, ***f)*** $\mathcal{P} = \mathcal{T}$ *et* $n = 100\,000$.

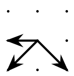
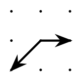
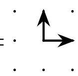
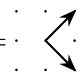
On arrondira les résultats au centième inférieur.

2 Énumération exhaustive et dénombrement

Si $A = (a_0, \ldots, a_n)$ est une marche, on pose $\delta(A) = (a_{k+1} - a_k)_{0 \leqslant k < n}$. On note $\Delta(\mathcal{P})$ l'ensemble des $\delta(A)$ tels que A soit une $\mathcal{P}$-marche.

On note $w_{\mathcal{P}}(i, j, n)$ le nombre de $\mathcal{P}$-marches de longueur n arrivant en (i, j), et $W_{\mathcal{P}}(n)$ le nombre total de $\mathcal{P}$-marches de longueur n.

Question à développer pendant l'oral 3 *Pour lesquels des ensembles de pas $\mathcal{P}$ suivants l'ensemble $\Delta(\mathcal{P})$ est-il un langage rationnel sur l'alphabet $\mathcal{P}$?*

$\mathcal{A} =$  $\mathcal{B} =$  $\mathcal{C} =$  $\mathcal{D} =$ 

Exprimer $W_{\mathcal{A}}(n)$, $W_{\mathcal{B}}(n)$ et $W_{\mathcal{C}}(n)$ en fonction de n.

Question 6 *Calculer*

1. *le nombre de marches de longueur n à pas dans $\mathcal{P}$,*
2. *la moyenne des $d(A)$ lorsque A décrit ces marches,*
3. *la somme modulo $1\,000$ des $u(d(A))$ lorsque A décrit ces marches,*

*pour **a)** $\mathcal{P} = \mathcal{R}$ et $n = 3$, **b)** $\mathcal{P} = \mathcal{K}$ et $n = 10$, **c)** $\mathcal{P} = \mathcal{G}$ et $n = 12$, **d)** $\mathcal{P} = \mathcal{T}$ et $n = 14$.*

Seul le résultat du point 3 (somme modulo $1\,000$) est demandé sur la fiche réponse, mais les autres sont utiles dans la suite.

Question à développer pendant l'oral 4 *Décrire l'algorithme que vous avez utilisé pour répondre à la question précédente, et le cas échéant des améliorations possibles. Évaluer sa complexité en fonction de n et des $W_{\mathcal{P}}(k)$.*

Question à développer pendant l'oral 5 *Comparer les valeurs moyennes de $d(A)$ calculées aux questions 5 et 6. Commenter. (On pourra tester d'autres exemples !)*

Question à développer pendant l'oral 6 *Pour $\mathcal{P}$ et (i, j) fixés, expliquer comment calculer $w_{\mathcal{P}}(i, j, n)$ en $\mathrm{O}(n^3)$ opérations. Quelle est la complexité en espace de votre méthode ?*

Les questions suivantes demandent de calculer des nombres de $\mathcal{P}$-marches trop grands pour être représentables sur un entier machine de 64 bits. Les résultats sont demandés modulo l'entier m, qui tient sur 30 bits. On veillera à réduire les résultats intermédiaires modulo m assez fréquemment pour éviter les débordements (par exemple, après chaque opération).

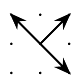
Question 7 *Calculer*

$$\left(\sum_{k=0}^{\ell-1} w_{\mathcal{U}(k)}(0, 0, n)\right) \bmod m \qquad \text{et} \qquad \left(\sum_{k=0}^{\ell-1} W_{\mathcal{U}(k)}(n)\right) \bmod m$$

*pour : **a)** $\ell = 5$ et $n = 10$, **b)** $\ell = 100$ et $n = 10$, **c)** $\ell = 10$ et $n = 200$.*

Question 8 *Calculer*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u(k)\, w_{\mathcal{P}}(k, k, n)\right) \bmod m \qquad \text{où} \qquad \mathcal{P} =$$



*pour : **a)** $n = 100$, **b)** $n = 800$, **c)** $n = 1\,200$.*

3 Récurrences

Question à développer pendant l'oral 7 *On considère l'algorithme suivant, prenant en entrée deux entiers a et b :*

> $(r_0, r_1) := (a, b)$
> $(v_0, v_1) := (0, 1)$
> *tant que* $r_1 \neq 0$
>   *soit q le quotient de la division euclidienne de r_0 par r_1*
> $(r_0, r_1) := (r_1, r_0 - q\, r_1)$
> $(v_0, v_1) := (v_1, v_0 - q\, v_1)$
> *renvoyer* $v_0 \bmod a$.

Justifier que, si a et b sont premiers entre eux et vérifient $a > b > 0$, cet algorithme renvoie l'inverse de b modulo a. On notera que les variables r_i et v_i peuvent prendre des valeurs négatives au cours du déroulement de l'algorithme.

Question 9 *On considère le système linéaire* *modulo 9 973*

$$\begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \dots & m_{0,n-1} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \dots & m_{1,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n-1,0} & m_{n-1,1} & \dots & m_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^d \\ 2^d \\ \vdots \\ n^d \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad m_{i,j} = u(i+j)\, u(i\,j).$$

Calculer x_0 pour ***a)*** *$n = 3$ et $d = 1$,* ***b)*** *$n = 25$ et $d = 2$,* ***c)*** *$n = 400$ et $d = 4$. On écrira $\varnothing$ s'il n'y a pas de solution.*

On se concentre maintenant sur les ensembles de pas $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$. Pour chacun de ces ensembles $\mathcal{P}$, on peut montrer qu'il existe des polynômes $p_0, p_1, \dots p_r$, non tous nuls, tels que l'on ait

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_r(n)\, W_{\mathcal{P}}(n+r) + \dots + p_1(n)\, W_{\mathcal{P}}(n+1) + p_0(n)\, W_{\mathcal{P}}(n) = 0. \qquad (1)$$

Question à développer pendant l'oral 8 *Pour un ensemble de pas $\mathcal{P}$ fixé, expliquer comment conjecturer une récurrence de la forme* (1) *(c'est-à-dire trouver un choix vraisemblable de coefficients p_k) à partir des premiers termes de la suite $(W_{\mathcal{P}}(n))_{n \in \mathbb{N}}$.*

Supposons de plus que l'on dispose de bornes sur l'ordre r de la récurrence (1) *ainsi que sur le degré des polynômes p_k qui y apparaissent. Comment utiliser cette information pour démontrer, au moins dans des cas favorables, que la récurrence conjecturée est correcte ?*

Question 10 *Calculer*

$$W_{\mathcal{P}}(n_0 + (u(100) \bmod 100)) \bmod m$$

pour chacun des jeux de paramètres suivants. Dans chaque cas, on admettra les bornes indiquées sur l'ordre r de la récurrence (1) *correspondant à l'ensemble de pas $\mathcal{P}$ et sur le degré maximal d de ses coefficients p_k.*

a) $\mathcal{P} = \mathcal{T}$ *($r < 3$, $d < 3$)*, $n_0 = 10\,000$, ***b)*** $\mathcal{P} = \mathcal{G}$ *($r < 3$, $d < 4$)*, $n_0 = 100\,000$,
c) $\mathcal{P} = \mathcal{R}$ *($r < 4$, $d < 5$)*, $n_0 = 1\,000\,000$, ***d)*** $\mathcal{P} = \mathcal{K}$ *($r < 7$, $d < 5$)*, $n_0 = 1\,000\,000$.

◇
◇ ◇
◇

Fiche réponse type: Marches à petits pas dans le quart de plan
$\widetilde{u_0}$: 42

Question 1

a) 876

b) 736

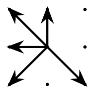
c) 974

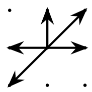
Question 2

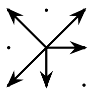
a) 2

b) 710

Question 3

a)  , ←

b)  , ↑

c)  , ↖

Question 4

a) (5, 0)

b) (4, 2)

c) (585, 30)

d) (740, 922)

Question 5

a) 5.64

b) 6.84

c) 5.15

d) 610.51

e) 755.07

f) 519.08

Question 6

a) 713

b) 161

c) 436

d) 234

Question 7

a) 111736, 12556845

b) 1107361, 143052589

c) 294992438, 960206503

Question 8

a) 683956716

b) 65038936

c) 5306994

Question 9

a) 9320

b) 9366

c) 7747

Question 10

a) 246766760

b) 746627516

c) 60980669

d) 523845595

Fiche réponse: Marches à petits pas dans le quart de plan

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)

d)

Question 5

a)

b)

c)

d)

e)

f)

Question 6

a)

b)

c)

d)

Question 7

a)

b)

c)

Question 8

a)

b)

c)

Question 9

a)

b)

c)

Question 10

a)

b)

c)

d)