Le jeu de QUARTO!®

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2015

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Il vous a été donné un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***.
Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

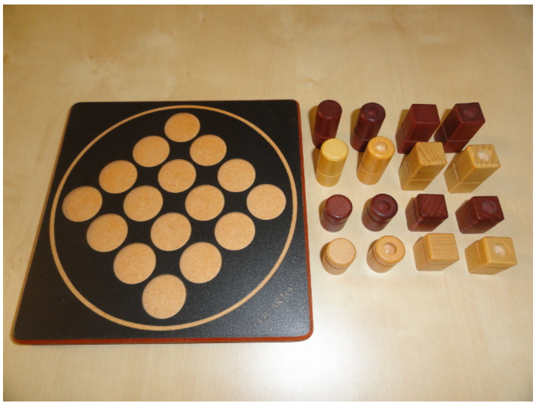

FIGURE 1 – Le matériel de jeu

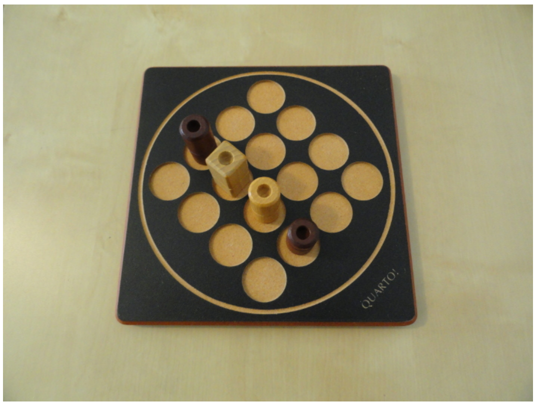

FIGURE 2 – Une configuration gagnante

1 Introduction

Ce problème étudie une variante du jeu de QUARTO!®.
Dans ce jeu, deux joueurs, que nous appellerons Gauche et Droite, placent tour à tour des pièces de bois sur une grille carrée de $4 \times 4 = 16$ cases, initialement vide. Le matériel de jeu comporte exactement une pièce présentant chaque combinaison possible de 4 caractéristiques binaires indépendantes (taille petite ou grande, forme ronde ou carrée, couleur claire ou foncée, consistance pleine ou creuse). Il y a donc au total $2^4 = 16$ pièces.
Le jeu procède comme suit. Initialement, Droite choisit une des pièces et la donne à Gauche, qui la place sur une case de son choix. Gauche choisit à son tour une pièce que Droite doit placer sur une case libre de la grille, et ainsi de suite. Les pièces posées ne sont jamais retirées ni déplacées. Le vainqueur est le premier joueur à former un alignement (en ligne, en colonne, ou sur une des diagonales du carré) de 4 pièces possédant une caractéristique en commun (4 pièces creuses, par exemple). Si les pièces sont épuisées avant que cela ne se produise, la partie est nulle.
On note C l'ensemble des cases du plateau, et P l'ensemble des pièces de jeu. On a donc $|C| = |P| = 16$. On représente les cases par leurs coordonnées (i, j) comme indiqué figure 3. On note aussi $\mathcal{C}(0), \mathcal{C}(1), \dots, \mathcal{C}(15)$ les cases énumérées par ordre lexicographique croissant.

$\mathcal{C}(15) = (3,3)$	$\mathcal{C}(14) = (3,2)$	$\mathcal{C}(13) = (3,1)$	$\mathcal{C}(12) = (3,0)$
$\mathcal{C}(11) = (2,3)$	$\mathcal{C}(10) = (2,2)$	$\mathcal{C}(9) = (2,1)$	$\mathcal{C}(8) = (2,0)$
$\mathcal{C}(7) = (1,3)$	$\mathcal{C}(6) = (1,2)$	$\mathcal{C}(5) = (1,1)$	$\mathcal{C}(4) = (1,0)$
$\mathcal{C}(3) = (0,3)$	$\mathcal{C}(2) = (0,2)$	$\mathcal{C}(1) = (0,1)$	$\mathcal{C}(0) = (0,0)$

FIGURE 3 – Repérage des cases du plateau

On représente les pièces par des vecteurs $p = (p_3, p_2, p_1, p_0) \in \{0,1\}^4$, chaque p_k correspondant à une des caractéristiques. On note $\mathcal{P}(d)$ la pièce dont les caractéristiques sont donnés par l'écriture binaire de $d \in \{0, \dots, 15\}$:

$$\mathcal{P}(p_3 \cdot 2^3 + p_2 \cdot 2^2 + p_1 \cdot 2 + p_0) = (p_3, p_2, p_1, p_0) \in P.$$

Une position est un plateau de jeu dont tout ou partie des cases peuvent comporter des pièces deux à deux distinctes. Formellement, on représentera une position comme une application $\gamma : C \to P \cup \{\perp\}$ (où $\perp$ indique une case vide) telle que $\gamma(c) = \gamma(c') \neq \perp \Rightarrow c = c'$ (c'est-à-dire d'une fonction partielle injective de C dans P). On note Γ l'ensemble des positions. Pour $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $p \in P$, on écrit $\gamma \xrightarrow{p} \gamma'$ si γ' s'obtient à partir de γ en ajoutant la pièce p sur le plateau. On écrit $\gamma \to \gamma'$ s'il existe $p \in P$ telle que $\gamma \xrightarrow{p} \gamma'$.

La partie 5 de ce problème peut être traitée indépendamment des parties 3 et 4, mais utilise des définitions et résultats énoncés dans ces parties.

Question à développer pendant l'oral 1 *Combien y a-t-il de suites de positions $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(15)}$ telles que $\gamma^{(0)} \to \gamma^{(1)} \to \cdots \to \gamma^{(15)}$? Estimer le temps qu'il faudrait pour les énumérer. Même question pour les positions elles-mêmes.*

2 Génération pseudo-aléatoire de positions

Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 1$ sont deux entiers, on note $a \bmod b$ le reste de la division euclidienne de a par b, autrement dit l'unique entier r avec $0 \leqslant r < b$ tel qu'il existe un entier q satisfaisant $a = bq + r$. La notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.
À partir de la valeur initiale u_0 qui vous a été donnée, on définit deux familles d'entiers $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_{n,d})_{n\geqslant 0, 0\leqslant d<16}$ par

$$u_{n+1} = 69070 u_n \bmod m \qquad \text{et} \qquad v_{n,d} = \left\lfloor \frac{d+1}{m} u_{16n+d} \right\rfloor, \qquad \text{où} \qquad m = 2^{32} - 5.$$

Question 1 *Calculer*
a) $(u_2 \bmod 10\,000, v_{2,15})$, ***b)*** $(u_{100} \bmod 10\,000, v_{100,15})$, ***c)*** $(u_{10\,000} \bmod 10\,000, v_{10000,15})$.

Soit $n \geqslant 0$. On définit une fonction π_n de $D = \{0, 1, \ldots, 15\}$ dans lui-même comme le résultat de l'algorithme suivant. L'algorithme opère sur une fonction $x : D \to D$. Initialement, x est la fonction nulle. Pour d variant de 0 à 15, on remplace $x(d)$ par $x(v_{n,d})$, puis on remplace $x(v_{n,d})$ par d. La sortie de l'algorithme est la fonction x à l'issue des itérations.

Question à développer pendant l'oral 2 *Montrer que la fonction π_n est une permutation de D.*

Pour $0 \leqslant \ell \leqslant 16$, soit $\gamma_{n,\ell}$ la position obtenue en posant la pièce $\mathcal{P}(\pi_{2n}(0))$ sur la case $\mathcal{C}(\pi_{2n+1}(0))$, puis la pièce $\mathcal{P}(\pi_{2n}(1))$ sur la case $\mathcal{C}(\pi_{2n+1}(1))$, et ainsi de suite ℓ fois, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \gamma_{n,\ell}(i,j) = \mathcal{P}(\pi_{2n}(d)) & \text{si } 4i + j = \pi_{2n+1}(d) \text{ avec } 0 \leqslant d < \ell, \\ \gamma_{n,\ell}(i,j) = \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

Observons que l'on a $\gamma_{n,0} \xrightarrow{p_0} \gamma_{n,1} \xrightarrow{p_1} \cdots \xrightarrow{p_{15}} \gamma_{n,16}$ où $p_d = \mathcal{P}(\pi_{2n}(d))$.

Question 2 *Calculer $(\gamma_{n,16}(0,0), \gamma_{n,16}(3,3))$ pour*
a) $n = 0$, ***b)*** $n = 2$, ***c)*** $n = 1\,000$.

3 Condition de gain

Un alignement de quatre pièces est dit gagnant si les quatre pièces ont une caractéristique commune, et une position est dite gagnante si elle comporte au moins un alignement gagnant. On note Γ^+ l'ensemble des positions gagnantes.

Question 3 *Pour n variant dans chacun des intervalles d'entiers suivants, donner le nombre de valeurs de n telles que la ligne du bas (les cases $\mathcal{C}(0), \mathcal{C}(1), \mathcal{C}(2), \mathcal{C}(3)$) de $\gamma_{n,16}$ forme un alignement gagnant :*
a) $n \in \{0, 1, \ldots, 3\}$, ***b)*** $n \in \{0, 1, \ldots, 100\}$, ***c)*** $n \in \{0, 1, \ldots, 10\,000\}$.

Question à développer pendant l'oral 3 *Décrire un algorithme qui décide si n éléments de $\{0,1\}^n$ ont une coordonnée en commun. Donner sa complexité en fonction de n. L'algorithme est-il identique à celui que vous avez utilisé pour répondre à la question 3 ? Expliquer les éventuelles différences.*

Question à développer pendant l'oral 4 *Décrire un algorithme basé sur celui de la question 3 et qui, étant données seize positions $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(15)}$ telles que $\gamma^{(0)} \to \gamma^{(1)} \to \cdots \to \gamma^{(15)}$, décide à quel coup la partie correspondante s'arrête (c'est-à-dire à quel coup apparaît le premier alignement gagnant, s'il y en a un). Combien d'appels à l'algorithme de la question 3 votre algorithme effectue-t-il dans le pire des cas ?*

Question 4 *Pour n variant dans chacun des intervalles d'entiers suivants, donner le nombre de valeurs de n pour lesquelles $\gamma_{n,16} \in \Gamma^+$:*
a) $n \in \{0, 1, \dots, 10\}$, ***b)*** $n \in \{0, 1, \dots, 1000\}$, ***c)*** $n \in \{0, 1, \dots, 10000\}$.

Question 5 *Pour chacune des valeurs de n suivantes, donner le nombre de pièces sur le plateau au moment où la partie $\gamma_{n,0}, \gamma_{n,1}, \dots$ s'arrête, et la dernière pièce posée :*
a) $n = 0$, ***b)*** $n = 30$, ***c)*** $n = 60$.

4 Stratégies gagnantes

Soient $\gamma \in \Gamma$ une position atteignable suivant les règles du jeu. On note $J(\gamma) \in \{\text{Gauche}, \text{Droite}\}$ le joueur dont c'est le tour de choisir une pièce (à faire poser à son adversaire) lorsque le plateau est en position γ, et $\bar{J}(\gamma)$ son adversaire. On définit la valeur $g(\gamma)$ de γ par

- $g(\gamma) = 1$ si le joueur $J(\gamma)$ peut jouer la suite de la partie de manière à gagner quels que soient les coups de son adversaire (on dit que $J(\gamma)$ a une stratégie gagnante) ;
- $g(\gamma) = -1$ si inversement, le joueur $\bar{J}(\gamma)$ a une stratégie gagnante ;
- $g(\gamma) = 0$ si aucun des deux joueurs n'a de stratégie gagnante.

On admettra que

$$\begin{cases} g(\gamma) = 1 & \text{si } \gamma \in \Gamma^+, \\ g(\gamma) = 0 & \text{si } \gamma \notin \Gamma^+ \text{ et } \forall c \in C, \gamma(c) \neq \bot, \\ g(\gamma) = \max\{-g(\gamma, p) | p \in P \setminus \gamma(C)\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où, pour $\gamma \in \Gamma$ avec au moins une case libre,

$$g(\gamma, p) = \max\left\{ g(\gamma') \middle| \gamma' \in \Gamma \text{ et } \gamma \xrightarrow{p} \gamma' \right\}.$$

Question à développer pendant l'oral 5 *En déduire un algorithme qui calcule la valeur d'une position. (On pourra librement utiliser les primitives suivantes : test de si une position est gagnante, de si le plateau est plein, énumération des cases libres ou des pièces disponibles.) Que représente la quantité $g(\gamma, p)$?*

La suite du problème vise à calculer $g(\gamma)$ pour des positions γ avec de plus en plus de cases libres. Des idées algorithmiques pour ce faire sont suggérées au fur et à mesure. Il n'est pas forcément nécessaire d'avoir mis en œuvre toutes les techniques suggérées jusque-là pour traiter une question donnée. Inversement, il peut être judicieux de revenir sur les questions non traitées avec un algorithme plus rapide.

Question 6 *Pour chacune des valeurs de d suivantes, donner le nombre de valeurs de n avec $0 \leqslant n \leqslant 100$ pour lesquelles $\gamma_{n,d} \notin \Gamma^+$ et $g(\gamma_{n,d}) = 1$, ainsi que (le cas échéant) la plus petite de ces valeurs.*
a) $d = 15$, ***b)*** $d = 14$, ***c)*** $d = 12$.

La remarque suivante est utile pour accélérer le calcul. Pour une certaine position γ, supposons que l'on sache que $g(\gamma) \geqslant 0$, autrement dit, que le joueur $J(\gamma)$ a une stratégie pour assurer au moins un match nul. Afin de déterminer la valeur de γ, on examine les coups possibles à partir de γ. Si, au cours de cette exploration, on établit qu'une certaine position γ' (avec $\gamma \to \cdots \to \gamma'$) où $J(\gamma') = J(\gamma)$ satisfait $g(\gamma') \leqslant 0$, il n'est pas nécessaire de déterminer si $g(\gamma')$ vaut 0 ou -1 : en effet, la valeur précise n'a pas d'influence sur $g(\gamma)$. Des observations similaires s'appliquent quand $g(\gamma) \leqslant 0$ et quand $J(\gamma') = \bar{J}(\gamma)$.

Question 7 *Pour chacune des valeurs de d suivantes, donner le nombre de valeurs de n avec $0 \leqslant n \leqslant 100$ et $\gamma_{n,d} \notin \Gamma^+$ pour lesquelles $g(\gamma_{n,d})$ prend chacune des valeurs -1, 0 et 1.*
a) $d = 11$, ***b)*** $d = 10$, ***c)*** $d = 9$.

La valeur d'une position ne dépend pas de l'ordre dans lesquelles les pièces ont été posées. On souhaite donc mémoriser les valeurs déjà calculées, dans la limite de la mémoire disponible.
Pour toute position γ, on pose

$$s(\gamma) = \sum_{(i,j)\in C'} 2^{64+4i+j} + \sum_{(i,j)\in C'} \sum_{k=0}^{3} \gamma(i,j)_k 2^{16i+4j+k}$$

où $C' \subseteq C$ désigne l'ensemble des cases non vides de γ.
On notera que la valeur de $s(\gamma)$ peut dépasser la taille maximale d'un entier machine. Dans le calcul de $s(\gamma) \bmod T$, on veillera à réduire les résultats intermédiaires modulo T de manière à éviter les dépassements de capacité. Il peut être judicieux de traiter spécialement le cas où T est une puissance de 2.

Question 8 *Calculer :*
a) $s(\gamma_{30,1}) \bmod 10000$, ***b)*** $s(\gamma_{0,6}) \bmod 10000$, ***c)*** $s(\gamma_{0,15}) \bmod 10000$.

Soit $S \geqslant 2^{24}$ un nombre premier, par exemple $16777259 \approx 2^{24}$ ou $33554393 \approx 2^{25}$.

Question à développer pendant l'oral 6 *Montrer que l'application $f : \Gamma \to \mathbb{Z}^2$ définie par $f(\gamma) = (s(\gamma) \bmod S, s(\gamma) \bmod 2^{56})$ est injective. Donner un algorithme pour calculer $s(\gamma)$ à partir de $f(\gamma)$. Cet algorithme n'est pas indispensable pour la suite.*

Une manière simple de mémoriser les valeurs connues utilise un tableau de taille fixée S. Quand on détermine la valeur d'une position γ (avec suffisamment de cases occupées pour que cela en vaille la peine), on stocke cette valeur ainsi que $s(\gamma) \bmod 2^{56}$ dans la case d'indice $s(\gamma) \bmod S$, en écrasant éventuellement la valeur qui s'y trouve déjà. Observons qu'il est possible de stocker les deux quantités sur un seul entier machine. On veillera aussi à combiner correctement la mémorisation avec la stratégie d'élagage suggérée dans le texte qui précède la question 7.

Question 9 *Pour chacune des valeurs de d et $n_{\max}$ suivantes, donner le nombre de valeurs de n avec $0 \leqslant n \leqslant n_{\max}$ et $\gamma_{n,d} \notin \Gamma^+$ pour lesquelles $g(\gamma_{n,d})$ prend chacune des valeurs -1, 0 et 1.*
a) $d = 10$, $n_{\max} = 100\,000$ ***b)*** $d = 9$, $n_{\max} = 10\,000$ ***c)*** $d = 8$, $n_{\max} = 100$.

5 Positions équivalentes

On s'intéresse dans cette partie à identifier les positions qui s'obtiennent par symétrie à partir de positions déjà rencontrées, afin d'éviter de recalculer leur valeur.
Une permutation (fonction bijective) $\varphi : \Gamma \to \Gamma$ est appelée une symétrie si elle préserve les règles du jeu, c'est-à-dire si pour toutes positions γ, γ' :

$$\gamma \to \gamma' \Rightarrow \varphi(\gamma) \to \varphi(\gamma') \qquad \text{et} \qquad \gamma \in \Gamma^+ \Rightarrow \varphi(\gamma) \in \Gamma^+.$$

Une permutation π des pièces induit une permutation φ de Γ définie par $\varphi(\gamma) = \pi \circ \gamma$: dans toute position, la pièce p est remplacée par la pièce $\pi(p)$. De même, une permutation ρ des cases du plateau induit une permutation ψ de Γ définie par $\psi(\gamma) = \gamma \circ \rho^{-1}$: la pièce qui était sur la case c se retrouve sur la case $\rho(c)$.
On appelle symétrie des pièces (resp. du plateau) une permutation des pièces (resp. du plateau) qui induit une symétrie de Γ.

Question à développer pendant l'oral 7 *Décrire l'ensemble des symétries des pièces. Décrire l'ensemble des symétries du plateau (il y en a 32). On ne demande pas de montrer que l'énumération est exhaustive.*

Deux positions $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ sont équivalentes si l'on peut passer de l'une à l'autre par une combinaison d'une symétrie des pièces π et d'une symétrie du plateau ρ, c'est-à-dire si $\gamma' = \pi \circ \gamma \circ \rho^{-1}$. Une position γ est dite normalisée si $s(\gamma)$ est minimal parmi les $s(\gamma')$ avec γ' équivalente à γ. Ainsi, toute position est équivalente à une unique position normalisée.

Question à développer pendant l'oral 8 *Soit γ une position comportant ℓ cases non vides $c_0 = \mathcal{C}(d_0), \dots, c_{\ell-1} = \mathcal{C}(d_{\ell-1})$ avec $d_0 < d_1 < \cdots < d_{\ell-1}$. Montrer que γ est une position normalisée si et seulement si*

(i) la case non vide la plus à gauche sur la première ligne non vide en partant du haut contient la pièce $(0,0,0,0)$, autrement dit, $\gamma(c_{\ell-1}) = \mathcal{P}(0)$;

(ii) la liste (w_0, w_1, w_2, w_3) où $w_k = \gamma(c_{\ell-1})_k \cdots \gamma(c_1)_k \gamma(c_0)_k \in \{0,1\}^*$ désigne le mot formé des caractéristiques d'indice k des pièces occupant les cases non vides est triée dans l'ordre lexicographique décroissant ;

(iii) on a $s(\gamma) \leqslant s(\gamma \circ \rho^{-1})$ pour toute symétrie du plateau ρ.

On pose $h(\gamma) = s(\gamma')$ où γ' est la position normalisée équivalente à γ.

Question 10 *Calculer*

$$(h(\gamma_{n,1}) \bmod 10\,000, h(\gamma_{n,6}) \bmod 10\,000, h(\gamma_{n,15}) \bmod 10\,000)$$

pour chacune des valeurs de n suivantes :
a) $n = 0$, ***b)*** $n = 30$, ***c)*** $n = 60$.

Question à développer pendant l'oral 9 *Montrer que deux positions équivalentes ont la même valeur.*

Question 11 *Donner le nombre d'entiers $n \in \{0, 1, \dots, n_{\max}\}$ tels que les positions $\gamma_{42,d}$ et $\gamma_{n,d}$ soient équivalentes pour chacune des valeurs de d et $n_{\max}$ suivantes.*
a) $d = 1$, $n_{\max} = 100$, ***b)*** $d = 2$, $n_{\max} = 10\,000$, ***c)*** $d = 3$, $n_{\max} = 10\,000$.

6 Stratégies gagnantes II

Question à développer pendant l'oral 10 *Reprendre la question **9 c)** avec des valeurs de d plus petites. Quelles améliorations supplémentaires pouvez-vous proposer à l'algorithme suggéré dans l'énoncé ? Jusqu'à quelle valeur de d arrivez-vous à faire le calcul ? Un des joueurs a-t-il une stratégie pour gagner contre toute défense de l'adversaire ? Si oui, lequel ?*

Fiche réponse type: Le jeu de QUARTO!®

$\widetilde{u_0}$: 75

Question 1

a) $(2347, 3)$

b) $(7083, 14)$

c) $(2332, 8)$

Question 2

a) $(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)$

b) $(1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0)$

c) $(1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1)$

Question 3

a) 1

b) 28

c) 2978

Question 4

a) 10

b) 973

c) 9797

Question 5

a) $14, (1, 0, 1, 1)$

b) $16, (0, 1, 0, 1)$

c) $13, (1, 1, 0, 1)$

Question 6

a) 0

b) $1, 49$

c) $3, 39$

Question 7

a) $(41, 10, 5)$

b) $(40, 24, 3)$

c) $(42, 34, 8)$

Question 8

a) 9216

b) 6989

c) 7069

Question 9

a) $(41445, 18367, 9202)$

b) $(3896, 3218, 1025)$

c) $(30, 53, 5)$

Question 10

a) $(3232, 6160, 7657)$

b) $(1616, 2464, 2679)$

c) $(1616, 703, 1509)$

Question 11

a) 52

b) 40

c) 9

Fiche réponse: Le jeu de QUARTO!®

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)

Question 5

a)

b)

c)

Question 6

a)

b)

c)

Question 7

a)

b)

c)

Question 8

a)

b)

c)

Question 9

a)

b)

c)

Question 10

a)

b)

c)

Question 11

a)

b)

c)