Géométrie

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2015

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Il vous a été donné un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un $\widetilde{u_0}$ particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec $\widetilde{u_0}$ au lieu de u_0. Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examinateur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe***. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

De nombreuses questions peuvent être traitées indépendamment. On veillera à ne pas être piégé(e) par des dépassements de capacité.

1 Préliminaires

Dans tout le sujet, $a \mod b$ désigne le reste de la division de a par b. Considérons $(u_k)_{k\geq 0}$ la suite d'entiers définie par :

$$u_k = \begin{cases} \text{votre } u_0 \quad (\textit{à reporter sur votre fiche réponse}) & \text{si } k = 0 \\ (37698 \times u_{k-1}) \mod 524287 & k > 0. \end{cases}$$

On définira aussi $u'_i = u_i \mod 10000$. On prendra garde aux dépassements de capacité. Dans tout le sujet, $||.||$ fait référence à la norme euclidienne. On utilisera indifféremment $u(n)$ et u_n.

Question 1 *Calculer :*

a) $u(30)$;
b) $u(60)$;
c) $u(90)$;
d) $u(300)$.

2 Points

Soit $x_{d,i} = (u(id), u(id+1), \dots, u(id+d-1))$.
Soit $x'_{d,i} = (u'(id), u'(id+1), \dots, u'(id+d-1))$.
Soit $E_{n,d}$ l'ensemble des $x_{d,i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.
Soit $E'_{n,d}$ l'ensemble des $x'_{d,i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Question 2 *Calculer le maximum de :*

a) $E_{40,1}$;
b) $E_{270,1}$;
c) $E_{500,1}$;
d) $E_{100000,1}$.

3 Enveloppe convexe

Un ensemble P est convexe si pour tous x et y dans P, et tout $t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in P$. Soit E un ensemble de points. On appelle enveloppe convexe de E l'intersection de tous les ensembles convexes contenant E.
Soit V un ensemble convexe. Un point $x \in V$ est dit point extrême de V si l'équation $x = ay + (1-a)z$ avec $a \in [0,1]$, $y \in V$, $z \in V$, implique que soit $y = x$, soit $z = x$.
On admettra que dans des cas importants et en particulier pour E fini dans $\mathbb{R}^d$, l'enveloppe convexe de E est égale à l'enveloppe convexe de l'ensemble F des points extrêmes de l'enveloppe convexe de E.

Quand on parlera de déterminer l'enveloppe convexe de E, on parlera en fait de déterminer F, noté $F(E)$, ensemble des points extrêmes de l'enveloppe convexe de E.
Les analyses de complexité pourront dépendre de la dimension de l'espace de travail, du cardinal de E, du cardinal de $F(E)$.
On commence par se placer dans le cas du plan, i.e. E ensemble fini inclus dans $\mathbb{R}^2$ donné sous la forme d'une liste finie de points. D'autres sections discuteront le cas général.
On rappelle que le produit vectoriel de $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ par $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur $(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \in \mathbb{R}^3$.
Soit $x''_{d,i} = (u(id), u(id+1), \ldots, u(id+d-1), 0)$. Pour $i \geq 2$, soit v_i le produit vectoriel de $x''_{2,i}$ et $x''_{2,i-1}$. Soit w_i la troisième composante de v_i.

Question à développer pendant l'oral 1 *Interprétez géométriquement le signe de w_i.*

Question 3 *Calculer le maximum des w_i dans les cas suivants :*

a) $2 \leq i \leq 100$. **b)** $2 \leq i \leq 550$. **c)** $2 \leq i \leq 1000$. **d)** $2 \leq i \leq 200000$.

Question 4 *Proposez un algorithme pour déterminer l'enveloppe convexe de $E \subset \mathbb{R}^2$. Prévoir une analyse de complexité en fonction du cardinal n de E. On pourra utiliser un tri adéquat.*

a) Déterminer le cardinal de $F(E_{100,2})$.
b) Déterminer le cardinal de $F(E_{550,2})$.
c) Déterminer le cardinal de $F(E_{1000,2})$.
d) Déterminer le cardinal de $F(E_{200000,2})$.

4 Distance maximale

Soit E un ensemble fini, on note $\delta(E) = \sup_{(a,b)\in E^2} ||a - b||$.

Question à développer pendant l'oral 2 *Etablir que $\delta(E)$ est égal à $\delta(F(E))$.*

L'enveloppe convexe peut être un outil précieux pour obtenir simplement une bonne complexité dans la question suivante. On pourra pour la question ci-dessous simplifier l'implémentation en prenant en compte la forme de l'ensemble de points considéré.

Question 5 *Proposer un algorithme et l'utiliser pour déterminer $\delta(E)^2$ dans les cas suivants en dimension 2. Analysez la complexité. On tâchera notamment de faire mieux que n^2 dans le cas de n points.*

a) $E = E'_{100,2}$.
b) $E = E'_{5050,2}$.
c) $E = E'_{10000,2}$.
d) $E = E'_{200000,2}$.

5 Paire de points les plus proches

Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble fini de points.

Question à développer pendant l'oral 3 *Proposer une méthode simple pour déterminer* $minp(E) = \min_{(a,b)\in E^2, a\neq b} ||a-b||^2$ *en temps* n^2*, où* n *est le cardinal de* E*.*

Imaginons nos points sur un plan, avec un axe gauche-droite et un axe haut-bas. On peut prendre l'abscisse médiane, et avoir ainsi une moitié (moitié arrondie à un nombre entier) de points à gauche, et l'autre à droite, de cette séparation médiane.
On peut alors récursivement étudier :

- la plus petite distance δ_1 parmi les paires de points de l'ensemble de gauche,
- et la plus petite distance δ_2 parmi les paires de points de l'ensemble de droite.
- Il ne reste alors plus qu'à étudier le cas de paires de points dont l'un est dans la partie gauche, et l'autre dans la partie droite :
  - Ne pas considérer les points trop loin de la frontière (à distance supérieure à $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$) ;
  - Calculer la distance minimale pour une paire de points distincts dans l'ensemble résultant (tout le problème est de ne pas considérer trop de paires - et une astuce est qu'il y a, dans un rectangle de largeur δ, au maximum 6 points distants d'au moins δ deux à deux, à distance au plus δ d'un point donné hors de ce rectangle).

Question à développer pendant l'oral 4 *Détailler une méthode de complexité significativement meilleure que* n^2*, pour calculer* $minp(E)$*.*

Question 6 *Implémentation :*

a) Déterminer $minp(E_{100,2})$.
b) Déterminer $minp(E_{550,2})$.
c) Déterminer $minp(E_{1000,2})$.
d) Déterminer $minp(E_{200000,2})$.

6 Déterminants

On rappelle que le déterminant d'une matrice Q de taille $d \times d$ est égal à la somme suivante : $det(Q) = \sum_\sigma \prod_{i=1}^d \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^d Q_{\sigma(i),i}$, où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ, et σ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,d\}$. Pour $i \geq d$, soit la matrice $M_{d,i}$ de taille $d\times d$ définie par $(M_{d,i})(a,b) = u'((i-d+a)\times d+b-1)$ $((a,b) \in \{1,\ldots,d\}^2)$.

Question 7 *Calculer le maximum des déterminants des matrices* $M_{d,i}$ *dans les cas suivants :*

a) $d = 3$, $d \leq i \leq 12$. **b)** $d = 3$, $d \leq i \leq 1300$. **c)** $d = 4$, $d \leq i \leq 140$. **d)** $d = 4$, $d \leq i \leq 2000$.

7 Enveloppe convexe dans le cas général

On appelle simplexe engendré par $d+1$ points de $\mathbb{R}^d$ l'enveloppe convexe de ces $d+1$ points.
On signale la propriété suivante : soit $d+1$ points $x_1, \ldots, x_{d+1}$, définissant un simplexe S (les sommets de S sont $x_1, \ldots, x_{d+1}$). On souhaite déterminer si un point appartient à S ; par translation, il est suffisant d'être capable de déterminer si 0 appartient à S.
Or, $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ appartient à S si pour tout j, 0 et x_j sont du même côté de l'hyperplan défini par les $(x_i)_{i \neq j}$. De manière équivalente, les déterminants des deux matrices suivantes ont le même signe, pour tout $j \in \{1, \ldots, d+1\}$:
– la matrice des vecteurs-lignes x_i pour $i \neq j$;
– la matrice des vecteurs-lignes $x_i - x_j$ pour $i \neq j$.
On a ainsi une caractérisation du fait que 0 appartient au simplexe S ; par translation, x appartient à S si 0 appartient à $S - x$.

Question à développer pendant l'oral 5 *Quel outil utiliser pour déterminer si un point appartient à un simplexe donné par ses sommets ? Une résolution de système linéaire peut être une solution, mais on pourra (au choix) préférer le déterminant, utilisé précédemment, et numériquement plus aisé au niveau du risque de dépassements de capacité.*

Dans le cas général d'une dimension d, une méthode possible pour déterminer l'enveloppe convexe d'un ensemble fini E de points consiste à vérifier pour chaque point de $E \subset \mathbb{R}^d$ s'il appartient à un simplexe engendré par $d+1$ autres points de E.

Question à développer pendant l'oral 6 *Quelle est la complexité de cette méthode, en fonction de n (cardinal de E) et d (la dimension) ?*

Question 8 *Calculer le cardinal de*

a) $F(E'_{12,3})$ **b)** $F(E'_{13,3})$ **c)** $F(E'_{14,4})$ **d)** $F(E'_{20,4})$

8 Disque minimal couvrant

Etant donné $E \subset \mathbb{R}^2$, on note $\zeta(E)$ le plus petit disque couvrant E, au sens du disque fermé de rayon minimal contenant E.

Question à développer pendant l'oral 7 *Proposer un algorithme calculant $\zeta(E)$ en temps $O(n^4)$, avec n le cardinal de E.*

Une solution alternative est possible par récurrence. **On la présente brièvement ci-dessous, tout en insistant sur le fait que des solutions plus simples peuvent être proposées, la méthode ci-dessous étant possiblement utilisée seulement pour établir des bornes de complexité.**
Etant donnés deux ensembles de points A et B, définissons $s(A, B)$ le plus petit disque contenant A et tangent aux points de B - lorsqu'un tel disque existe. On peut observer que $\zeta(\{x_1, \ldots, x_n\}) = s(\{x_1, \ldots, x_n\}, \{\})$. Ensuite, on peut noter une récurrence intéressante : $s(\{x_1, \ldots, x_n\}, E)$ (lorsqu'il est défini, ce qui n'est pas toujours le cas) est égal :

- à l'unique disque tangent aux points de E si E définit bien un tel disque et s'il contient bien $\{x_1, \ldots, x_n\}$;
- sinon,
  - à U, si $x_n \in U$, avec $U = s(\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, E)$ (s'il est défini).
  - à $s(\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, E \cup \{x_n\})$ (s'il est défini) sinon.

Pour appliquer cette récurrence, on supprime un point dans le premier argument de $s(.,.)$. Le choisir au hasard est une option possible, notamment pour prouver une borne sur la complexité en moyenne.
Les candidats sont libres de proposer des solutions alternatives, moins complexes, et d'en présenter une analyse approchée ou exacte.

Question à développer pendant l'oral 8 *Utilisez ce principe, ou choisissez une méthode de votre choix, pour calculer $\zeta(E)$ en meilleure complexité que le n^4 précédent - discuter la complexité, de manière prouvée ou seulement approchée intuitivement.*

Question 9 *Calculer le carré du diamètre de $\zeta(E)$ dans les cas suivants (arrondi au nombre entier immédiatement inférieur) :*

a) $E = E'_{500,2}$.
b) $E = E'_{13000,2}$.
c) $E = E'_{25500,2}$.
d) $E = E'_{100000,2}$.

9 Enveloppe convexe en dimension 3

Dans le cas d'une dimension 3, une méthode possible de calcul d'enveloppe convexe est comme suit.
L'algorithme met à jour un ensemble G de faces, qui grossit peu à peu jusqu'a être égal à l'enveloppe convexe. G est stocké sous forme d'un ensemble connexe de triangles, toujours sous-ensemble de l'enveloppe convexe, et on maintient une liste des arêtes extérieures de G.
L'algorithme est alors :
- A toute étape, on a une enveloppe convexe partielle G, connexe. Certaines arêtes de G sont définies comme extérieures.
- On sélectionne un triangle T, sur le bord de cette enveloppe convexe partielle.
- On sélectionne une arête e de cette enveloppe convexe partielle, située sur le bord extérieur de G.
- Le plan P contenant T est alors basculé autour de e, jusqu'à rencontrer un point p de E. Plus formellement, p est caractérisé par le plus petit angle de déviation par rapport au plan P. En cas d'égalité entre plusieurs points, on peut prendre p à distance maximale.
- G est mis à jour, il contient désormais le triangle défini par e et p. L'arête e n'est plus une arête extérieure de G.

L'implémentation de cette méthode est délicate. On pourra préférer réutiliser la méthode de la section 7, en supprimant des points dont on peut facilement établir qu'ils ne font pas partie de l'enveloppe convexe - même si d'un point de vue de la complexité au pire cas cette approche est mauvaise. Comme

précédemment, on pourra analyser la complexité avec cette méthode exacte et implémenter une méthode heuristique astucieuse et plus simple.

Question à développer pendant l'oral 9 *Proposez une analyse de complexité pour la détermination de l'enveloppe convexe en dimension 3.*

Question 10 *Avec l'algorithme de votre choix,*

a) Déterminer le cardinal de $F(E'_{100,3})$.
b) Déterminer le cardinal de $F(E'_{550,3})$.
c) Déterminer le cardinal de $F(E'_{1000,3})$.
d) Déterminer le cardinal de $F(E'_{10000,3})$.

Fiche réponse <u>type</u>: Géométrie

$\widetilde{u_0}$: 1115

Question 1

a) 266933

b) 330561

c) 99338

d) 160164

Question 2

a) 519008

b) 523326

c) 523839

d) 524282

Question 3

a) 231925170181

b) 240813931979

c) 261961572411

d) 269453109354

Question 4

a) 13

b) 16

c) 15

d) 29

Question 5

a) 170517448

b) 196396861

c) 196396861

d) 198861737

Question 6

a) 19590677

b) 654001

c) 654001

d) 429178

Question 7

a) 396423688452

b) 825314716049

c) 5002214448039566

d) 7163821143623972

Question 8

a) 11

b) 12

c) 13

d) 19

Question 9

a) 187033255

b) 197747225

c) 198185765

d) 198862129

Question 10

a) 33

b) 66

c) 84

d) 118

Fiche réponse: Géométrie

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

d)

Question 2

a)

b)

c)

d)

Question 3

a)

b)

c)

d)

Question 4

a)

b)

c)

d)

Question 5

a)

b)

c)

d)

Question 6

a)

b)

c)

d)

Question 7

a)

b)

c)

d)

Question 8

a)

b)

c)

d)

Question 9

a)

b)

c)

d)

Question 10

a)

b)

c)

d)