

# Jeu de Hex

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation  
Concours commun des Écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/Juillet 2013

**ATTENTION !**

N'oubliez en aucun cas de recopier votre  $u_0$   
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

## Important.

Sur votre table est indiqué un numéro  $u_0$  qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un  $\tilde{u}_0$  particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec  $\tilde{u}_0$  au lieu de  $u_0$ . Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre  $u_0$ ) sur la seconde et vous la remettrez à l'examineur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!

Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre  $n$ , on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple:  $O(n^2)$ ,  $O(n \log n)$ ,...

Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de *tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe*. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.



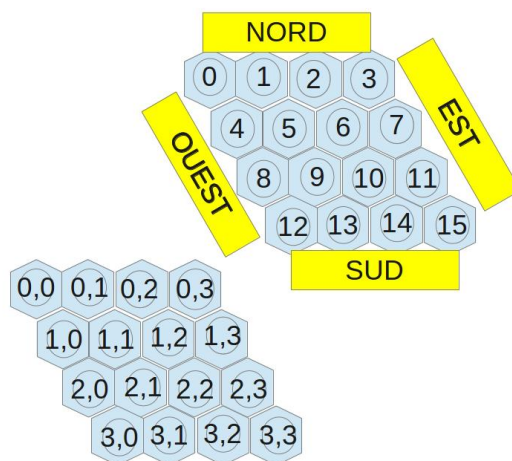


FIGURE 1 – Un plateau de Hex.

On définit par récurrence  $u_n = 15091u_{n-1}$  modulo 64007.  $u_0$  vous est donné (sur votre table) et doit être recopié sur votre fiche réponse. Des réponses types vous sont données à titre d'exemple pour un  $u_0$  particulier. On notera indifféremment  $u_n = u(n)$ .

On considère une grille de Hex (Fig. 1). Deux joueurs jouent à tour de rôle. Au début du jeu la grille est vide. À chaque tour, un des joueurs remplit une des cases de la grille. Le joueur 1 commence. Le joueur 1 remplit une case en y inscrivant un X. Le joueur 2 remplit une case en y inscrivant un O. Il est interdit de jouer sur une case déjà remplie. Le joueur 1 gagne si à un moment ou à un autre les X connectent le Nord et le Sud sans que les O aient jamais connecté les côtés Est et Ouest ; sinon le joueur 2 gagne. Il est connu que cette définition équivaut à la définition symétrique basée sur le joueur 2. Il est connu qu'il ne peut pas y avoir d'égalité ; il arrive forcément à un moment ou à un autre que soit Nord et Sud sont connectés par des X, ou bien Est et Ouest sont connectés par des O. Le jeu peut se jouer en taille variable ; la taille est  $s$ , le nombre de cases sur un côté ; le nombre total de cases est  $s^2$ . On utilise pour index soit une paire (un numéro de ligne et un numéro de colonne), soit un nombre de 0 à  $s^2 - 1$ , comme indiqué en Fig. 1. Étant donné une case d'index  $n$ , tout entier  $n + k \times s^2$ , pour un entier  $k$ , sera aussi considéré comme un index de cette case. On appelle stratégie du joueur 1 une application qui à un plateau de jeu comportant autant de X que de O associe une case vide. On appelle stratégie du joueur 2 une application qui à un plateau de jeu comportant un X excédentaire par rapport aux O associe une case vide. Une stratégie du joueur 1 et une stratégie du joueur 2 définissent naturellement une partie de Hex, nécessairement gagnée par l'un des joueurs. Il est connu que quel que soit le premier coup, il existe une stratégie gagnante pour l'un des joueurs.

Dans la suite, lorsque l'on pose la question "quel joueur gagne" (dans les questions 7, 8 et 9), on sous-entend dans le cas où chaque joueur est capable de déterminer et suivre une stratégie optimale.

# 1 Analyse de plateaux

**Question 1** Plaçons-nous en taille  $s = 17$ . Supposons que le joueur 1 ait posé un  $X$  sur la case  $i$  si et seulement si  $u_{i+M}$  est pair; sinon, le joueur 2 a posé un  $O$  sur cette case. On n'a pas forcément un nombre de  $X$  et un nombre de  $O$  compatibles avec les règles, mais cela importe peu pour cette question.

- a) Combien y a-t-il de  $O$  sur le plateau si  $M = 1414$  ?
- b) Combien y a-t-il de  $O$  sur le plateau si  $M = 1919$  ?
- c) Combien y a-t-il de  $O$  sur le plateau si  $M = 4242$  ?

**Question 2** On génère des plateaux de jeu comme dans la question précédente, mais cette fois-ci en taille  $s = 171$ .

- a) Y a-t-il une connection de  $X$  entre Nord et Sud si  $M = 1414$  ? Combien de  $X$  sont reliés à Nord ?
- b) Y a-t-il une connection de  $X$  entre Nord et Sud si  $M = 1919$  ? Combien de  $X$  sont reliés à Nord ?
- c) Y a-t-il une connection de  $X$  entre Nord et Sud si  $M = 4242$  ? Combien de  $X$  sont reliés à Nord ?

**Question à développer pendant l'oral :** Quelle est la complexité de l'algorithme employé, en temps et en espace-mémoire ?

# 2 Simulations de parties

**Question 3** On déroule des parties comme suit :

- le joueur 1 joue  $u_{M+2i}$  avec  $i \geq 0$  minimal tel que la case de tel index soit vide;
- le joueur 2 joue  $u_{M+2i+1}$  avec  $i \geq 0$  minimal tel que la case de tel index soit vide.
- a) Quel joueur gagne si  $s = 150$  et  $M = 14000$  ; à quel tour gagne-t-il ? (on numérote le premier tour 0)
- b) Quel joueur gagne si  $s = 150$  et  $M = 17000$  ; à quel tour gagne-t-il ? (on numérote le premier tour 0)
- c) Quel joueur gagne si  $s = 150$  et  $M = 42000$  ; à quel tour gagne-t-il ? (on numérote le premier tour 0)

**Question à développer pendant l'oral :** Quelle est la complexité de l'algorithme utilisé ? Considérer à la fois la complexité en temps et en espace-mémoire.

**Question 4** On déroule un match comme précédemment, mais avec  $M$  tiré au sort aléatoirement et uniformément entre  $u(i), u(1+i), u(2+i), \dots, u(15+i)$ . Quelle est la probabilité pour que le joueur 1 gagne **a)** si  $i = 0$ , **b)** si  $i = 16$ , **c)** si  $i = 32$  ?

**Question 5** On déroule des parties comme suit :

- le joueur 1 joue la case d'index  $u_{M+i}$  avec  $i \geq 0$  minimal tel que cette case soit vide;
- le joueur 2 joue la case d'index  $u_{M+i}$  avec  $i \geq 0$  minimal tel que cette case soit vide.
- a) Quel joueur gagne si  $s = 231$  et  $M = 14000$  ; à quel tour gagne-t-il ? (on numérote le premier tour 0)

- b)** Quel joueur gagne si  $s = 231$  et  $M = 17000$  ; à quel tour gagne-t-il ? (on numérote le premier tour 0)
- c)** Quel joueur gagne si  $s = 231$  et  $M = 42000$  ; à quel tour gagne-t-il ? (on numérote le premier tour 0)

**Question 6** On génère des parties de la même manière qu'à la question 4.

- a)** Combien de valeurs de  $M \in \{14000, 14001, \dots, 14000 + s^2 - 1\}$  mènent à la victoire du joueur 1 si  $s = 50$  ?
- b)** Combien de valeurs de  $M \in \{17000, 17001, \dots, 17000 + s^2 - 1\}$  mènent à la victoire du joueur 1 si  $s = 50$  ?
- c)** Combien de valeurs de  $M \in \{42000, 42001, \dots, 42000 + s^2 - 1\}$  mènent à la victoire du joueur 1 si  $s = 50$  ?

### 3 Optimisation de stratégies

**Question 7** Supposons  $s = 3$ . Supposons que les joueurs soient capables de jeu parfait, c'est-à-dire que s'il existe une stratégie leur permettant de gagner pour l'un d'entre eux, alors il va gagner à coup sûr.

- a)** On ajoute une règle forçant le joueur 1 à jouer  $u(4)$  au premier tour. Quel joueur gagne ? Et s'il jouait  $-u(4)$  au lieu de  $u(4)$  ? Et s'il jouait  $-u(4) + 1$  au lieu de  $u(4)$  ? Et s'il jouait  $-u(4) + 2$  au lieu de  $u(4)$  ?
- b)** On ajoute une règle forçant le joueur 1 à jouer  $u(5)$  au premier tour. Quel joueur gagne ? Et s'il jouait  $-u(5)$  au lieu de  $u(5)$  ? Et s'il jouait  $-u(5) + 1$  au lieu de  $u(5)$  ? Et s'il jouait  $-u(5) + 2$  au lieu de  $u(5)$  ?
- c)** On ajoute une règle forçant le joueur 1 à jouer  $u(3)$  au premier tour. Quel joueur gagne ? Et s'il jouait  $-u(3)$  au lieu de  $u(3)$  ? Et s'il jouait  $-u(3) + 1$  au lieu de  $u(3)$  ? Et s'il jouait  $-u(3) + 2$  au lieu de  $u(3)$  ?

**Question 8** Supposons  $s = 4$ . Supposons que les joueurs soient capables de jeu parfait, c'est-à-dire que s'il existe une stratégie leur permettant de gagner pour l'un d'entre eux, alors il va gagner à coup sûr.

- a)** On ajoute une règle forçant le joueur 1 à jouer  $u(4)$  au premier tour et le joueur 2 à répondre  $-u(4) + 2i + 1$ . Quel joueur gagne si  $i = 0, i = 1, i = 2$  ?
- b)** On ajoute une règle forçant le joueur 1 à jouer  $u(5)$  au premier tour et le joueur 2 à répondre  $-u(5) + 2i + 1$ . Quel joueur gagne si  $i = 0, i = 1, i = 2$  ?
- c)** On ajoute une règle forçant le joueur 1 à jouer  $u(3)$  au premier tour et le joueur 2 à répondre  $-u(3) + 2i + 1$ . Quel joueur gagne si  $i = 0, i = 1, i = 2$  ?

**Question à développer pendant l'oral :** Quelle est la complexité en temps et espace-mémoire de votre algorithme ?

**Question 9** Supposons  $s = 4$ . Supposons que les joueurs soient capables de jeu parfait, c'est-à-dire que s'il existe une stratégie leur permettant de gagner pour l'un d'entre eux, alors il va gagner à coup sûr.

- a)** On ajoute une règle forçant le joueur 1 à jouer  $u(4)$  au premier tour. Quel joueur gagne ? Et s'il jouait  $-u(4)$  au lieu de  $u(4)$  ?

**b)** On ajoute une règle forçant le joueur 1 à jouer  $u(5)$  au premier tour. Quel joueur gagne ? Et s'il jouait  $-u(5)$  au lieu de  $u(5)$  ?

**c)** On ajoute une règle forçant le joueur 1 à jouer  $u(3)$  au premier tour. Quel joueur gagne ? Et s'il jouait  $-u(3)$  au lieu de  $u(3)$  ?

**Question à développer pendant l'oral :** Il est connu qu'en l'absence de contraintes sur le premier coup, le premier joueur gagne la partie s'il joue optimalement. Proposez une méthode pour déterminer un premier coup du joueur 1 qui rende la partie "intéressante". Proposer des méthodes pour accélérer votre algorithme.

**Question à développer pendant l'oral :** Pistes pour accélérer la méthode ?



## Fiche réponse type: Jeu de Hex

$\widetilde{u}_0$  : 17

### Question 1

a) 140

b) 139

c) 131

### Question 2

a) non - 5004

b) oui - 5501

c) oui - 7696

### Question 3

a) 2, 21807

b) 2, 22477

c) 2, 22001

### Question 4

a) 0.4375

b) 0.4375

c) 0.625

### Question 5

a) 1, 52802

b) 1, 52373

c) 1, 52370

### Question 6

a) 1038

b) 1154

c) 1173

### Question 7

a) 1,1,2,2

b) 2,2,2,1

c) 2,2,1,1

### Question 8

a) 1,1,1

b) 1,1,1

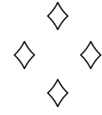
c) 1,1,1

### Question 9

a) 2,1

b) 1,2

c) 1,2 |





# Fiche réponse: Jeu de Hex

Nom, prénom, u<sub>0</sub>: .....

## Question 1

a)

b)

c)

## Question 2

a)

b)

c)

## Question 3

a)

b)

c)

## Question 4

a)

b)

c)

## Question 5

a)

b)

c)

## Question 6

a)

b)

c)

## Question 7

a)

b)

c)

## Question 8

a)

b)

c)

## Question 9

a)

b)

c)

