

# Cartographie d'arbres

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation  
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin 2012

**ATTENTION !**

N'oubliez en aucun cas de recopier votre  $u_0$   
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

## Important.

Sur votre table est indiqué un numéro  $u_0$  qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un  $\tilde{u}_0$  particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec  $\tilde{u}_0$  au lieu de  $u_0$ . Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre  $u_0$ ) sur la seconde et vous la remettrez à l'examineur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!

Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre  $n$ , on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple:  $O(n^2)$ ,  $O(n \log n)$ ,...

Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de **tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe**. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.



# 1 Introduction

Dans ce sujet, on va chercher des moyens de se déplacer sur des arbres binaires, et d'optimiser leur stockage sur des supports de taille limitée.

On considère la suite d'entiers  $(u_k)$  définie pour  $k \geq 0$  par :

$$u_k = \begin{cases} \text{votre } u_0 \text{ (à reporter sur votre fiche)} & \text{si } k = 0 \\ 15\,091 \times u_{k-1} \pmod{64\,007} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

**Question 1** Que valent : **a)**  $u_{10}$                       **b)**  $u_{100}$                       **c)**  $u_{1000}$

On définit l'arbre binaire  $A_n$  de la façon suivante :

- $A_0$  est l'arbre réduit à un seul nœud, appelé feuille.
- Pour  $n > 0$ ,  $A_n$  est un nœud muni de deux sous-arbres :
  - son fils gauche est l'arbre  $A_{u_{2n} \pmod n}$ ,
  - son fils droit est l'arbre  $A_{u_{2n+1} \pmod n}$ .

On appelle père d'un nœud  $n_i$  dans l'arbre le nœud  $n_j$  tel que  $n_i$  est un fils de  $n_j$ , et racine de l'arbre le seul nœud qui ne possède pas de père.

**Question 2** Donnez le nombre de nœuds et de feuilles des arbres suivants :

**a)**  $A_{10}$                                       **b)**  $A_{100}$                                       **c)**  $A_{1000}$

## 2 Schéma d'adressage des arbres

On veut pouvoir trouver son chemin facilement dans les arbres, c'est-à-dire savoir se déplacer d'un nœud  $n_i$  vers un nœud  $n_j$ . Pour cela, on munit les nœuds d'une adresse qui permet de savoir facilement comment rejoindre un nœud, ou que l'on soit dans l'arbre. L'adresse d'un nœud  $n_i$  est un couple d'entiers  $(l_i, m_i)$  tels que :

- $l_i$  est le numéro de  $n_i$  dans un parcours en profondeur préfixe, en supposant que la racine porte le numéro 0.
- $m_i$  est la plus grande valeur de  $l_j$  pour les nœuds  $n_j$  du sous-arbre enraciné en  $n_i$ .

Dans la suite du sujet, on repérera un nœud  $n_i$  de l'arbre par son indice  $l_i$ .

**Question 3** Pour les arbres et les valeurs de  $l_i$  suivantes, on donnera les valeurs de  $m_i$  telles que  $(l_i, m_i)$  est l'adresse d'un nœud  $n_i$  de l'arbre :

**a)**  $A_{10}$ ,  $l_i = 3$                       **b)**  $A_{100}$ ,  $l_i = 9$                       **c)**  $A_{1000}$ ,  $l_i = 30$ .

**Question à développer pendant l'oral :** Expliquez comment trouver son chemin d'un nœud  $n_i$  à un nœud  $n_j$  dans l'arbre grâce à ces adresses.

**Question 4** Donnez la distance parcourue en nombre de nœuds traversés lorsqu'on se déplace sur les arbres suivants du nœud  $n_i$  au nœud  $n_j$  donnés par leurs valeurs  $l_i$  et  $l_j$  (si  $n_i = n_j$ , on considèrera que cette distance vaut zéro) :

**a)**  $A_{10}$ ,  $l_i = 3$  et  $l_j = 9$       **b)**  $A_{100}$ ,  $l_i = 5$  et  $l_j = 30$       **c)**  $A_{1000}$ ,  $l_i = 30$  et  $l_j = 90$

### 3 Cartographie d'arbres

On veut créer une représentation cartographique de l'arbre sur lequel on se déplace. La taille d'une carte est limitée, il faut donc plusieurs cartes pour couvrir tout l'arbre. On suppose qu'une carte peut contenir jusqu'à  $p$  nœuds de l'arbre. Lorsqu'on traverse cet arbre, de la racine jusqu'à une feuille, on a besoin d'emporter toutes les cartes nécessaires, de telle sorte que le chemin de la racine jusqu'à la feuille soit couvert. On appelle cartographie de taille  $k$  une partition des nœuds de l'arbre en  $k$  sous-ensembles disjoints contenant chacun au plus  $p$  nœuds.

On appelle coût d'un nœud pour une cartographie donnée le nombre des cartes qui couvrent le chemin depuis la racine de l'arbre jusqu'à ce nœud. On note  $c(n_i)$  le coût d'un nœud  $n_i$ . On va surtout s'intéresser ici au coût des feuilles de l'arbre. On note  $F_A$  l'ensemble des feuilles de l'arbre  $A$ . Pour une cartographie donnée, on considère le coût moyen  $C^{\text{moy}}(A)$  des feuilles de l'arbre, ainsi que le coût maximum  $C^{\text{max}}(A)$  des feuilles de l'arbre :

$$C^{\text{max}}(A) = \max_{f \in F_A} c(f), \quad C^{\text{moy}}(A) = \frac{1}{|F_A|} \sum_{f \in F_A} c(f).$$

**Question 5** On propose une méthode de cartographie simple : pour  $k = 0..[n/p]$ , la carte  $k$  contient les nœuds d'indice  $l_j$  avec  $p \times k \leq l_j < p \times (k + 1)$ . Pour les arbres et les valeurs de  $p$  suivantes, donnez le coût moyen des feuilles  $C^{\text{moy}}$  et le coût maximum des feuilles  $C^{\text{max}}$  :

a)  $A_{10}, p = 3$

b)  $A_{100}, p = 6$

c)  $A_{1000}, p = 9$

**Question à développer pendant l'oral :** Quelle est la complexité de votre algorithme ?

#### 3.1 Minimisation du coût maximum

Pour un arbre  $A$  donné, on cherche maintenant à obtenir une cartographie telle que le coût maximum des feuilles  $C^{\text{max}}(A)$  est minimal. Dans une telle cartographie, on note  $p(A)$  la taille minimale d'une carte contenant la racine de  $A$ .

**Question à développer pendant l'oral :** Donnez une expression de  $C^{\text{max}}(A)$  et  $p(A)$  en fonction de  $C^{\text{max}}(A_g)$ ,  $C^{\text{max}}(A_d)$ ,  $p(A_g)$  et  $p(A_d)$  où  $A_g$  et  $A_d$  sont les sous-arbres gauche et droite de l'arbre.

**Question 6** Pour les arbres et valeurs de  $p$  suivantes, donnez le coût maximum des feuilles  $C^{\text{max}}(A)$  ainsi que la taille minimale de la carte contenant la racine dans une cartographie minimisant  $C^{\text{max}}(A)$  :

a)  $A_{10}, p = 3$

b)  $A_{100}, p = 6$

c)  $A_{1000}, p = 9$

**Question à développer pendant l'oral :** Comment limiter le nombre de cartes tout en gardant une cartographie qui minimise le coût maximum des feuilles ? On pourra donner une borne par rapport au nombre minimal de cartes possible.

### 3.2 Minimisation du coût moyen

On cherche ici à minimiser le coût moyen  $C^{\text{moy}}(A)$  des feuilles de  $A$  dans une cartographie. On suppose ici que dans une cartographie, les cartes sont des parties convexes de l'arbre. Ainsi, si deux nœuds  $n_i$  et  $n_j$  sont dans une même carte, tous les nœuds sur le chemin de  $n_i$  à  $n_j$  sont aussi dans cette carte.

**Question à développer pendant l'oral :** Montrez qu'il existe une cartographie minimisant le coût moyen des feuilles telle que la carte contenant la racine possède exactement  $p$  nœuds dès que l'arbre contient plus de  $p$  nœuds.

Soit  $C(i, k)$  la valeur minimale de la somme des coûts des feuilles du sous-arbre enraciné en  $n_i$  lorsque la carte contenant  $n_i$  possède au plus  $k$  nœuds. Donnez une expression de  $C(i, k)$  en fonction des  $C(j, k')$  pour les fils  $n_j$  de  $n_i$ , et  $k' = 1, \dots, p$ . On pourra noter  $f(n_i)$  le nombre de feuilles du sous-arbre enraciné en  $n_i$ .

**Question 7** Quel est le coût moyen des feuilles  $C^{\text{moy}}(A)$  minimal pour les arbres et valeurs de  $p$  suivants ?

a)  $A_{10}, p = 3$

b)  $A_{100}, p = 6$

c)  $A_{1000}, p = 9$

**Question à développer pendant l'oral :** Donnez la complexité en temps et en espace de votre algorithme. Peut-on les améliorer ?

## 4 Minimisation du coût maximum et du coût moyen

On cherche désormais à optimiser à la fois le coût maximum des feuilles et leur coût moyen.

**Question à développer pendant l'oral :** Expliquez comment calculer, pour un arbre et une valeur de  $p$  donnés, le plus petit coût moyen des feuilles dans une cartographie quand on impose que le coût maximum des feuilles est inférieur ou égal à une valeur  $V$  donnée. Quelle est la complexité en temps et en espace de votre algorithme ?

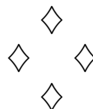
Pour un arbre  $A$  et une valeur de  $p$  donnés, on note  $C^1(A, p)$  le plus petit coût moyen des feuilles dans une cartographie, et  $C^2(A, p)$  le plus petit coût maximum des feuilles dans une cartographie où le coût maximum des feuilles est minimal.

**Question 8** Pour les arbres suivants, donnez la plus petite valeur de  $p \geq 3$  telle que  $C^1(A, p) \neq C^2(A, p)$ , ainsi que les valeurs de  $C^1(A, p)$  et  $C^2(A, p)$  correspondantes.

a)  $A_{500}$

b)  $A_{1000}$

c)  $A_{3000}$





## Fiche réponse type: Cartographie d'arbres

$\widetilde{u}_0 : 7$

### Question 1

a) 13238

b) 61807

c) 28695

### Question 2

a) 21, 11

b) 107, 54

c) 2459, 1230

### Question 3

a) 5

b) 11

c) 40

### Question 4

a) 3

b) 4

c) 8

### Question 5

a) 2.727, 4

b) 3.963, 6

c) 7.293, 15

### Question 6

a) 3, 1

b) 3, 6

c) 5, 3

### Question 7

a) 2.545

b) 2.815

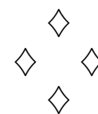
c) 3.853

### Question 8

a) 8, 3.511, 3.517

b) 24, 2.819, 2.820

c) 22, 2.895, 2.897







# Fiche réponse: Cartographie d'arbres

Nom, prénom, u<sub>0</sub>: .....

## Question 1

- a)
- b)
- c)

## Question 2

- a)
- b)
- c)

## Question 3

- a)
- b)
- c)

## Question 4

- a)
- b)
- c)

## Question 5

- a)
- b)
- c)

## Question 6

- a)
- b)
- c)

## Question 7

- a)
- b)
- c)

## Question 8

- a)
- b)
- c)

