

Réseaux d'interconnexion

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation

Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin 2012

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.

Sur votre table est indiqué un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Les réponses attendues sont généralement courtes et doivent être données sur la fiche réponse fournie à la fin du sujet. À la fin du sujet, vous trouverez en fait deux fiches réponses. La première est un exemple des réponses attendues pour un \tilde{u}_0 particulier (précisé sur cette même fiche et que nous notons avec un tilde pour éviter toute confusion!). Cette fiche est destinée à vous aider à vérifier le résultat de vos programmes en les testant avec \tilde{u}_0 au lieu de u_0 . Vous indiquerez vos réponses (correspondant à votre u_0) sur la seconde et vous la remettrez à l'examineur à la fin de l'épreuve.

En ce qui concerne la partie orale de l'examen, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!

Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n , on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...

Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de **tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main ou bien à l'aide de la fiche réponse type fournie en annexe**. Enfin, il est recommandé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer afin d'effectuer les bons choix de structures de données dès le début.

1 Introduction

On s'intéresse dans ce sujet à la création d'un réseau d'interconnexion pour relier des objets disposés dans une portion carrée du plan.

On considère la suite d'entiers (u_k) définie pour $k \geq 0$ par :

$$u_k = \begin{cases} \text{votre } u_0 \text{ (à reporter sur votre fiche)} & \text{si } k = 0 \\ 15\,091 \times u_{k-1} \pmod{64\,007} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Question 1 Que valent : **a)** u_{10} **b)** u_{100} **c)** u_{1000}

On s'intéresse ici à des objets localisés sur une portion carrée de taille $n \times n$ du plan. Ces objets sont repérés par leurs coordonnées (x, y) . On désigne par $P_{n,k}$ l'objet défini par ses coordonnées $(u_{2k} \pmod n, u_{2k+1} \pmod n)$. Chaque coordonnée est donc un entier compris entre 0 et $n - 1$.

Question 2 Dans les ensembles d'objets donnés par les coordonnées suivantes, comptez le nombre de points multiples, c'est-à-dire de points du plan qui contiennent plusieurs objets :

a) $\{P_{5,1}, \dots, P_{5,10}\}$ **b)** $\{P_{50,1}, \dots, P_{50,1000}\}$ **c)** $\{P_{500,1}, \dots, P_{500,10\,000}\}$

Dans la suite, on utilisera les objets donnés par les ensembles de coordonnées suivants :

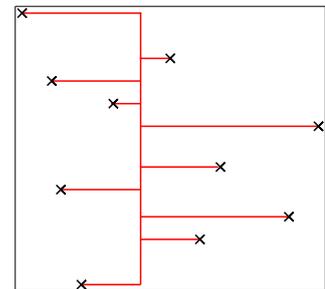
- $E_a = \{P_{20,1}, \dots, P_{20,5}\}$,
- $E_b = \{P_{300,1}, \dots, P_{300,40}\}$ et
- $E_c = \{P_{1000,1}, \dots, P_{1000,200}\}$

et on assure qu'ils ne contiennent aucun point multiple.

Par la suite, on cherche à relier ces objets par des liens de communication, afin que chaque objet puisse communiquer avec tous les autres. On considère que le coût d'un réseau dépend de la longueur total des liens utilisés. Notre objectif est de minimiser ce coût du réseau, donc de trouver un réseau dont la somme des longueurs des liens est minimale.

2 Construction d'un réseau rectilinéaire

Pour commencer, on considère un contexte spécial, qui autorise uniquement des liens de communication horizontaux et verticaux. On étudie ici un type de réseau spécifique, qui contient un seul segment vertical (appelé tronc par analogie avec un arbre), et plusieurs segments verticaux (appelées branches), comme illustré sur la figure ci-contre. On nomme un tel réseau un réseau en arbre à un seul tronc



Question à développer pendant l'oral : Montrez que dans le réseau en arbre à un seul tronc de coût minimal, l'abscisse du tronc doit être proche de la médiane des abscisses des objets (on supposera que tous les points ont des ordonnées différentes).

Question 3 Calculez le coût minimal d'un réseau en arbre à un seul tronc pour les ensembles d'objets suivants : **a)** E_a **b)** E_b **c)** E_c

3 Construction d'un réseau sans relais

Afin de définir de façon unique les solutions dans cette partie, nous définissons l'ordre lexicographique sur les paires d'objets. Pour une dimension n donnée, on identifie un objet $P_{n,i}$ à son indice i . Soient deux paires d'objets $\{i, j\}$ et $\{i', j'\}$ telles que $i < j$ et $i' < j'$. On dit que $\{i, j\}$ est plus petite que $\{i', j'\}$ dans l'ordre lexicographique (et on note $\{i, j\} \leq_{lex} \{i', j'\}$ si et seulement si :

$$i < i' \text{ ou } (i = i' \text{ et } j < j').$$

Dans le cas général, on suppose maintenant qu'on peut utiliser des liens d'orientation quelconque. Néanmoins, on suppose pour l'instant qu'un lien est un segment de droite qui relie deux objets. On considère le réseau construit en suivant le processus suivant, appelé algorithme de Prim :

1. On choisit les deux objets les plus proches (au sens de la distance euclidienne), et on les relie par un segment (en cas d'égalité entre plusieurs paires d'objets les plus proches, on choisit la paire d'objets la plus petite dans l'ordre lexicographique).
2. Soit A l'ensemble des objets déjà connectés. Tant que tous les objets ne sont pas connectés, on choisit deux objets $x \notin A$ et $y \in A$ tels que la distance entre eux soit minimale, et on les relie par un segment (en cas d'égalité, on choisit la paire $\{x, y\}$ la plus petite dans l'ordre lexicographique).

Question 4 *Donnez le coût (longueur totale) du réseau obtenu avec cet algorithme pour les ensembles d'objets suivants : a) E_a b) E_b c) E_c .*

Question à développer pendant l'oral : Quelle est la complexité de votre implémentation ? Pourriez-vous l'améliorer ?

On pourra remarquer que le réseau créé ne contient pas de cycles, c'est-à-dire de chemin de longueur non nulle passant deux fois par le même objet. Ainsi, il existe un unique chemin pour aller d'un objet à un autre. On admettra que cet algorithme calcule un réseau de coût minimal sous la contrainte que les liens sont des segments de droite entre les objets.

On appelle degré d'un objet le nombre de liens qui touchent cet objet.

Question 5 *Donnez le degré maximal, ainsi que le nombre d'objets qui atteignent ce degré maximal, dans les réseaux créés dans la question précédente pour les ensembles d'objets suivants :*

a) E_a b) E_b c) E_c .

NB : Les parties 4 et 5 sont indépendantes entre elles.

4 Construction d'un réseau avec points relais

On suppose maintenant que l'on dispose d'un certain nombre de points relais, de coordonnées connues, que l'on peut utiliser pour construire le réseau d'interconnexion. Les liens peuvent donc être établis entre deux paires de points, chaque point pouvant être un objet ou un point relais. Il n'est pas obligatoire d'inclure tous les points relais dans le réseau. Dans la suite, on va utiliser les ensembles de points relais donnés par les coordonnées suivantes :

- $R_a = \{P_{20,6}, P_{20,7}, \dots, P_{20,15}\}$,
- $R_b = \{P_{300,41}, P_{300,42}, \dots, P_{300,50}\}$ et
- $R_c = \{P_{1000,201}, P_{1000,202}, \dots, P_{1000,205}\}$

et on assure qu'ils ne contiennent aucun point multiple.

Question 6 Calculez la longueur totale du plus petit réseau d'interconnexion possible obtenu pour les ensembles d'objets et de points relais suivants, ainsi que le nombre minimum de points relais utilisés : **a)** E_a et R_a **b)** E_a et R_b **c)** E_c et R_c .

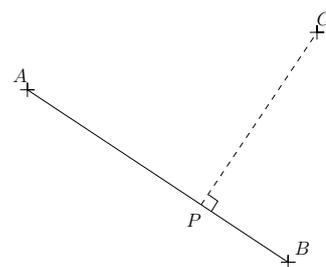
Question à développer pendant l'oral : Donnez la complexité de votre algorithme.

On suppose maintenant qu'on peut disposer des points relais là où on le souhaite. On modifie l'algorithme de Prim de la façon suivante : lors du rajout d'un objet au réseau, on choisit l'objet non connecté qui est le plus proche (a) d'un objet connecté, ou bien (b) d'un lien de communication. On relie alors cet objet, dans le cas (a), à l'objet connecté concerné, ou bien dans le cas (b) au lien de communication concerné en rajoutant un point relais sur ce lien de communication, de façon à minimiser la longueur du lien ajouté. En cas d'égalité entre les cas (a) et (b), on choisira le cas (a). Dans le cas (a) en cas d'égalité entre deux paires d'objets, on choisira la plus petite dans l'ordre lexicographique. Dans le cas (b), en cas d'égalité entre deux solutions, on choisira celle qui utilise le segment le plus ancien, et en deuxième critère l'objet $P_{i,n}$ de plus petit indice i .

Pour calculer la distance d'un objet à un segment, on pourra utiliser la propriété suivante, illustrée sur la figure ci-contre.

Propriété 1 Soient $[AB]$ un segment, C un point et P le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) (qu'il soit ou non sur le segment $[AB]$). Alors on a

$$\vec{AP} = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2} \vec{AB}$$



Question 7 Donnez le coût des réseaux obtenus à l'aide de l'algorithme décrit ci-dessus sur les ensembles d'objets suivants : **a)** E_a **b)** E_b **c)** E_c .

5 Caractéristiques d'un réseau

Dans cette partie, on va s'intéresser à calculer certaines caractéristiques des réseaux calculés par l'algorithme de Prim à la question 4.

On appelle diamètre d'un réseau la plus grande distance entre deux objets du réseau en nombre de liens traversés pour relier ces deux objets. On considère aussi le diamètre géométrique qui est la plus grande distance géométrique parcourue en allant d'un objet à un autre dans le réseau.

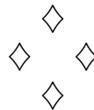
Question 8 Calculez le diamètre et le diamètre géométrique des réseaux créés avec l'algorithme de Prim sur les ensembles de points suivants :

- a) E_a b) E_b c) E_c .

On appelle charge d'un lien de communication le nombre de paires d'objets qui utilisent ce lien pour communiquer.

Question 9 Calculez la charge maximale d'un lien de communication pour les réseaux créés avec l'algorithme de Prim sur les ensembles de points suivants :

- a) E_a b) E_b c) E_c .



Fiche réponse type: Réseaux d'interconnexion

\widetilde{u}_0 : 9

Question 1

a) 35308

b) 24603

c) 9462

Question 2

a) 2

b) 150

c) 58

Question 3

a) 23

b) 2525

c) 51767

Question 4

a) 22.23

b) 1112.01

c) 9170.21

Question 5

a) 2, 3

b) 3, 8

c) 4, 1

Question 6

a) 21.20, 1

b) 1109.83, 1

c) 9170.21, 0

Question 7

a) 21.98

b) 1110.09

c) 9133.58

Question 8

a) 4, 22.23

b) 20, 530.55

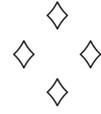
c) 66, 3400.21

Question 9

a) 6

b) 364

c)



Fiche réponse: Réseaux d'interconnexion

Nom, prénom, u₀:

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

b)

c)

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)

Question 5

a)

b)

c)

Question 6

a)

b)

c)

Question 7

a)

b)

c)

Question 8

a)

b)

c)

Question 9

a)

b)

c)

