Étoiles

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juin/juillet 2006

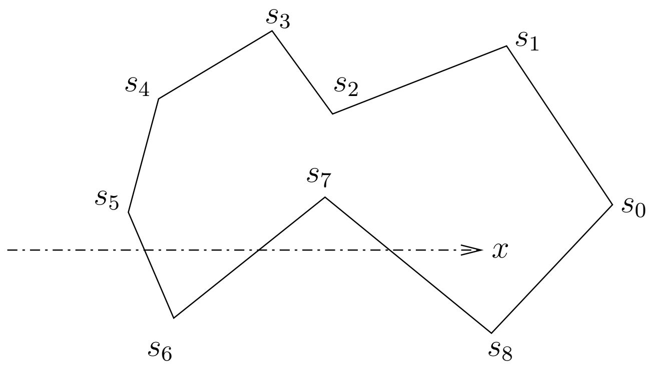
ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

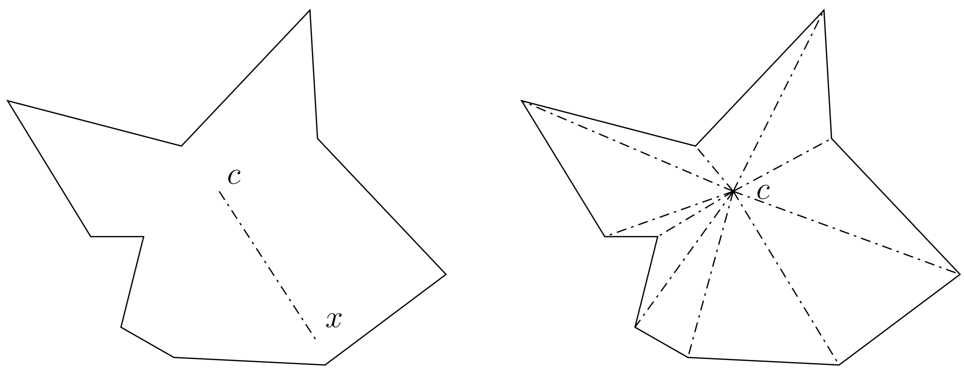
Important.
Lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main***.

1 Introduction

On définit un polygone du plan P par la suite de ses sommets $(s_i)_{i=0\dots n-1}$. Les arêtes du polygone sont les segments $[s_0, s_1[$, $[s_1, s_2[$, … $[s_{n-2}, s_{n-1}[$, $[s_{n-1}, s_0[$. Un polygone partitionne le plan en deux parties connexes : l'intérieur de P, noté $\overline{P}$ et l'extérieur du polygone. Un point x appartient à l'intérieur $\overline{P}$ du polygone si et seulement si une demi-droite quelconque issue de x intersecte un nombre impair d'arêtes. Un polygone est dit simple si ses arêtes sont deux à deux non sécantes.



Un polygone simple $P = (s_0, \dots s_{n-1})$ est une étoile si il existe un point c, appelé centre de P, appartenant à l'intérieur de P, tel que pour tout point x appartenant à $\overline{P}$, le segment $[c, x]$ est inclus dans $\overline{P}$. Remarquons que le centre d'une étoile n'est en général pas unique. On appelle rayons de P les segments $[c, s_i]$, pour $i = 0, \dots n-1$. Toute étoile $P = (s_0, \dots s_{n-1})$ se décompose en une union de triangles issus d'un centre du polygone et d'intersection réduite au centre c ou à un rayon $[c, s_i]$, pour $i = 0, \dots n-1$.



2 Suite entière pseudo-aléatoire

Considérons la suite d'entiers (u_i) définie pour $i \geq 0$ par :

$$u_i = \begin{cases} \textit{votre } \mathtt{u}_0 \textit{ (à reporter sur votre fiche)} & \text{si } i = 0 \\ 8\,191 \times u_{i-1} \mod 30\,269 & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

Attention : On choisira u_0 strictement positif et inférieur ou égal à $30\,268$.

Question 1 *Calculer :* ***a)*** u_{10}, ***b)*** u_{100} *et* ***c)*** u_{1000}.

Notons (v_i) la suite de nombres rationnels appartenant à l'intervalle $]0,1[$, définie pour $i \geq 0$:

$$v_i = \frac{u_i}{30\,269}$$

3 Intersection de droites et de segments

On programmera trois fonctions calculant respectivement :
- l'intersection de deux droites,
- l'intersection d'une droite horizontale et d'un segment,
- l'intersection de deux segments.

Ces fonctions devront distinguer plusieurs cas. En effet, deux droites peuvent être colinéaires, parallèles ou sécantes. De même deux segments peuvent avoir pour intersection l'ensemble vide, un point ou un segment.
On considérera qu'une droite est définie par une équation $ax + by = c$ et que les points d'un segment sont solutions d'un système d'inéquations de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ c_1 \leq bx - ay \leq c_2 \end{cases}$$

Dans la suite du sujet, à l'exception de l'intersection d'une demi-droite horizontale avec un ensemble de segments, les droites et les segments considérés seront ni verticaux ni horizontaux. On peut donc supposer que les coefficients a et b sont non nuls.
Question à développer pendant l'oral : Détailler un algorithme de décision de la vacuité de l'intersection de deux segments définis par les coordonnées cartésiennes de leurs extrémités.
Soit la suite de segments $a_i = [p_i, p'_i]$ dont les extrémités sont définies par leurs coordonnées $p_i = (x_i, y_i)$ et $p'_i = (x'_i, y'_i)$, avec :

$$\begin{cases} x_i = v_{4i} \\ y_i = v_{4i+1} \\ x'_i = v_{4i+2} \\ y'_i = v_{4i+3} \end{cases}$$

Question 2 ***a)*** *Calculer le cardinal de l'ensemble des paires (i,j) telles que* $0 \leq i < j < 100$ *et* $a_i \cap a_j \neq \emptyset$.

4 Polygones et étoiles

Soient les paramètres n et m, entiers positifs non nuls.
Soit l'ensemble d'entiers $I = \{i | i \geq 0 \text{ et } u_{2i} \equiv 0 \mod m\}$ et la suite de points $(s_i)_{i \in I}$, avec $s_i = (x_i, y_i)$ défini comme suit :

$$\begin{cases} x_i &= v_{2i+1} \cos \frac{2\pi i}{n} \\ \\ y_i &= v_{2i+1} \sin \frac{2\pi i}{n} \end{cases}$$

Pour tout $k \geq 0$, P_k est le polygone défini par la sous-suite de sommets $(s_i)_{i \in I}$ tels que $_{kn \leq i < (k+1)n}$

Question 3 *Fixons $n = 17$ et $m = 3$. Calculer le nombre de sommets des polygones* ***a)*** *P_{10},* ***b)*** *P_{100} et* ***c)*** *P_{1000}.*

Soit (c_n) la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} & c_0 &= \text{le plus petit } k \geq 0 \text{ tel que} & \text{l'origine est un centre de } P_k \text{ et} \\ & & & P_k \text{ possède au moins 3 sommets} \\ \forall i \geq 0 & c_{i+1} &= \text{le plus petit } k > c_i \text{ tel que} & \text{l'origine est un centre de } P_k \text{ et} \\ & & & P_k \text{ possède au moins 3 sommets} \end{cases}$$

On remarquera que pour tout $k \geq 0$, P_k est une étoile admettant l'origine $(0,0)$ pour centre si et seulement si $(0,0) \in \overline{P}_k$.
Soit (Q_i) la suite d'étoiles centrées à l'origine et ayant au moins 3 sommets, définie par $Q_i = P_{c_i}$, pour tout $i \geq 0$.

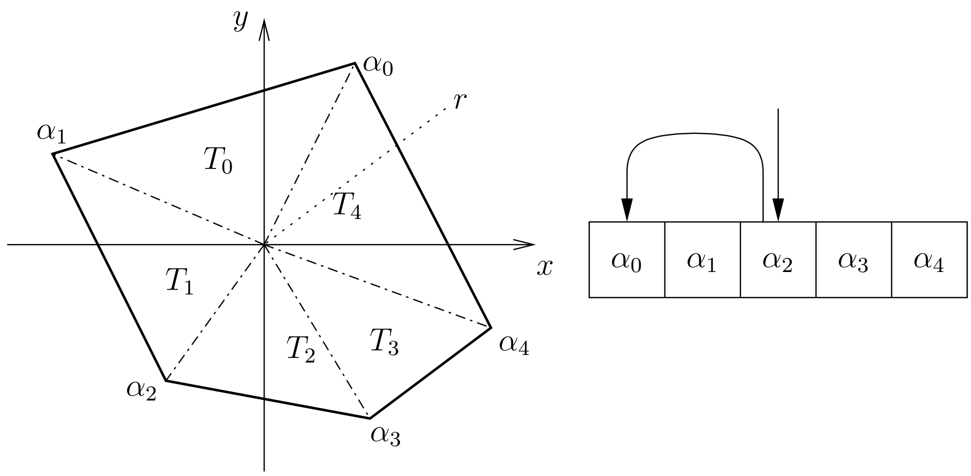
Question 4 *Fixons $n = 17$ et $m = 3$. Calculer* ***a)*** *c_1,* ***b)*** *c_{10} et* ***c)*** *c_{100}*

5 Appartenance d'un point à l'intérieur d'une étoile

On peut utiliser la décomposition d'une étoile en union de triangles pour donner un meilleur algorithme de décision de l'appartenance d'un point r à l'intérieur d'une étoile centrée à l'origine $P = (s_0, \dots s_{n-1})$. Pour cela, il convient de concevoir un algorithme permettant de rechercher le triangle $(c, s_i, s_{i+1 \mod n})$ contenant r, si il existe, en temps $o(n)$. L'idée est de passer en coordonnées polaires et de construire un tableau qui partitionne l'intervalle $[0, 2\pi[$ en une suite d'intervalles $[0, \alpha_0[$, $[\alpha_0, \alpha_1[$, $\dots$, $[\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}[$, $[\alpha_{n-1}, 2\pi[$, avec α_i étant l'angle que forme le rayon $[(0,0), s_i]$ avec l'axe des abscisses, pour tout $0 \leq i < n$. Ce tableau sera ensuite utilisé pour faire une recherche par dichotomie de l'intervalle contenant l'angle α que forme la demi-droite issue de l'origine et passant par r avec l'axe des abscisses.
Question à développer pendant l'oral : Détailler l'algorithme de recherche dichotomique. On justifiera sa complexité en temps.
Soit Q_0 l'étoile définie en partie 4, en prenant $n = 8\,191$ et $m = 5$. Soit l'ensemble fini de points $R = \{r_0, \dots r_{k-1}\}$, avec $k = 5\,000$. Pour tout $0 \leq i < k$, les coordonnées cartésiennes de $r_i = (x_i, y_i)$ sont définies comme suit :

$$\begin{cases} x_i &= 2v_{2i+2n} - 1 \\ y_i &= 2v_{2i+2n+1} - 1 \end{cases}$$

Question 5 ***a)*** *Quel est le cardinal de $R \cap \overline{Q}_0$?*



6 Union et intersection d'étoiles centrées à l'origine

L'ensemble des intérieurs d'étoiles ayant l'origine pour centre est fermé par union et intersection. Ceci nous permet de définir une opération d'union sur les polygones : pour toute paire d'étoiles centrées à l'origine P et P', $P \cup P'$ est l'unique étoile dont l'intérieur est égal à $\overline{P} \cup \overline{P'}$. De même l'intersection de deux étoiles centrées à l'origine est définie par : $\overline{P \cap P'} = \overline{P} \cap \overline{P'}$.
Ces définitions de l'union et de l'intersection ne sont pas constructives : elle ne définissent pas explicitement les sommets des étoiles $P \cup P'$ et $P \cap P'$.
On remarquera que l'union de deux étoiles centrées à l'origine $P = (s_0, \ldots s_{k-1})$ et $P' = (s'_0, \ldots s'_{k'-1})$ est l'étoile dont l'ensemble des sommets S est le plus petit ensemble tel que :

$$\left\{\begin{array}{lrl}
\forall i,\ 0 \leq i < k, & s_i \notin \overline{P'} & \Rightarrow\ s_i \in S \\
\forall j,\ 0 \leq j < k', & s'_j \notin \overline{P} & \Rightarrow\ s'_j \in S \\
\forall i, j,\ 0 \leq i < k,\ 0 \leq j < k', & [s_i, s_{i+1 \mod k}] \cap [s'_j, s'_{j+1 \mod k'}] = \{x\} & \Rightarrow\ x \in S \\
\forall i, j,\ 0 \leq i < k,\ 0 \leq j < k', & [s_i, s_{i+1 \mod k}] \cap [s'_j, s'_{j+1 \mod k'}] = [x, y] & \Rightarrow\ x, y \in S
\end{array}\right.$$

On remarquera qu'en énumérant les sommets et les arêtes de P et de P' dans le sens trigonométrique, il est possible de calculer S en temps $O(k + k')$ et non $O(kk')$ comme le laisse supposer la définition de S.
Question à développer pendant l'oral : Détailler l'algorithme et les structures de données employés pour calculer les intersections des arêtes de deux polygones. Justifier la complexité en temps de l'algorithme.
Dans ce qui suit, on fixera $n = 337$ et $m = 4$. Soit (Q_i) la suite d'étoiles définie en partie 4. $m = 5$).

Question 6 ***a)*** *Quel est le nombre de sommets de Q_0 n'appartenant pas à Q_1 ?* ***b)*** *Quel est le nombre de sommets de Q_1 n'appartenant pas à Q_0 ?* ***c)*** *Quel est le nombre de paires d'arêtes de Q_0 et de Q_1 s'intersectant ?*

Question 7 ***a)*** *Quel est le nombre de sommets de $Q_2 \cup Q_3$?* ***b)*** *Quel est le périmètre de $Q_2 \cup Q_3$?*

On adaptera le programme développé pour calculer l'intersection de deux étoiles centrées à l'origine.

Question 8 ***a)*** *Quel est le nombre de sommets de* $Q_4 \cap Q_5$ *?* ***b)*** *Quel est le périmètre de* $Q_4 \cap Q_5$ *?*

Étoiles

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

Question 2

a)

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)

Question 5

a)

Question 6

a)

b)

c)

Question 7

a)

b)

Question 8

a)

b)

◇
◇ ◇
◇