Graphes d'intervalles

Épreuve pratique d'algorithmique et de programmation
Concours commun des écoles normales supérieures

Durée de l'épreuve: 3 heures 30 minutes

Juillet 2005

ATTENTION !

N'oubliez en aucun cas de recopier votre u_0
à l'emplacement prévu sur votre fiche réponse

Important.
Lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de façon schématique, courte et précise. Vous ne devez en aucun cas recopier le code de vos procédures!
Quand on demande la complexité en temps ou en mémoire d'un algorithme en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, par exemple: $O(n^2)$, $O(n \log n)$,...
Il est recommandé de commencer par lancer vos programmes sur de petites valeurs des paramètres et de ***tester vos programmes sur des petits exemples que vous aurez résolus préalablement à la main***.

Définitions. Un *graphe non-orienté* $G = (V, E)$ est défini par la donnée de son ensemble de *sommets* V et d'un ensemble E (éventuellement vide) de paires de sommets. On dit qu'il existe une *arête* entre deux sommets u et v dans G, si $\{u, v\} \in E$. E est ainsi appelé l'*ensemble des arêtes* de G.
On dit que deux sommets u et v d'un graphe $G = (V, E)$ sont *voisins* s'ils sont reliés par une arête dans G, c'est-à-dire si $\{u, v\} \in E$.
Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ se représente commodément sur une feuille en représentant chaque sommet par un rond et en traçant un trait entre les sommets reliés par une arête dans G.
On peut, par exemple, encoder un graphe ayant n sommets sous forme d'une matrice $n \times n$ symétrique A, telle que $A_{i,j} = 1$ si $\{i, j\} \in E$, et $A_{i,j} = 0$ sinon. Remarquez que la partie triangulaire supérieure stricte de A définit complétement le graphe G. A est appelée la *matrice d'adjacence* de G. On peut également encoder ce graphe par un tableau de n listes, où la i-ème liste contient la liste des voisins du i-ème sommet. Cependant, certaines classes de graphes particulières s'encodent plus simplement (par exemple : les cycles, les arbres...). Nous étudions ici la classe des graphes d'intervalles.

1 Préambule

Considérons la suite (u_n) définie pour $0 \leqslant n < 10\,000$ par :

$$u_n = \begin{cases} \textit{votre } \mathsf{u_0} \textit{ (à reporter sur votre fiche)} & \text{si } n = 0 \\ (15\,991 \times u_{n-1}) \bmod 65\,539 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

On note (v_n) et (w_n) les suites de nombres à virgule flottante suivantes :

$$v_n = \frac{8.0 \times u_{2n}}{655\,390.0} \text{ et } w_n = \frac{2.0 \times u_{2n+1}}{655\,390.0}, \text{ pour } 0 \leqslant n < 5000.$$

Question 1 *Quelle est la valeur de* **a)** u_{100}, **b)** u_{1000}, **c)** u_{9999} ? **d)** *Quel est le nombre d'indices* i, $100 \leqslant i \leqslant 5999$, *tels que :*

$$\frac{(u_i \bmod 7)}{2} \leqslant (u_{i+1} \bmod 7) \text{ ?}$$

2 Intervalles

Nous définissons la suite d'intervalles (I_n) de $[0, 1]$, définie par :

$$I_n = [v_n, v_n + w_n], \text{ pour } n \geqslant 0.$$

On associe à chaque extrémité de l'intervalle I_n un *triplet* contenant son abscisse, son type (gauche ou droite), et l'indice n de l'intervalle associé. Les extrémités de I_n sont donc respectivement associées aux triplets $\langle v_n, G, n \rangle$ et $\langle v_n + w_n, D, n \rangle$. Ces triplets sont *totalement ordonnés* dans l'ordre lexicographique classique, noté $\prec$, avec la convention $G < D$. Ainsi, par exemple, $\langle 0.6536, D, 5 \rangle \prec \langle 0.8437, G, 3 \rangle$, $\langle 0.6536, G, 8 \rangle \prec \langle 0.6536, D, 5 \rangle$ et $\langle 0.6536, D, 2 \rangle \prec \langle 0.6536, D, 3 \rangle$.

Cet ordre sera très utile dans la suite du problème.

Question 2 *Pour chacune des valeurs de n et de p suivantes, triez par ordre croissant les triplets associés aux extrémités gauche et droite des intervalles $I_0, \ldots, I_n$ toutes ensembles, et donnez la p-ème et la $(2p)$-ème plus petite extrémité (gauche ou droite), la $(p+1)$-ème extrémité gauche, et la $(2p+1)$-ème extrémité droite :* **a)** $n = 10$, $p = 3$ **b)** $n = 100$, $p = 47$ **c)** $n = 500$, $p = 249$ **d)** $n = 1\,000$, $p = 380$ **e)** $n = 2\,500$, $p = 692$.

À partir de la section suivante, les questions sont toutes indépendantes entre elles et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

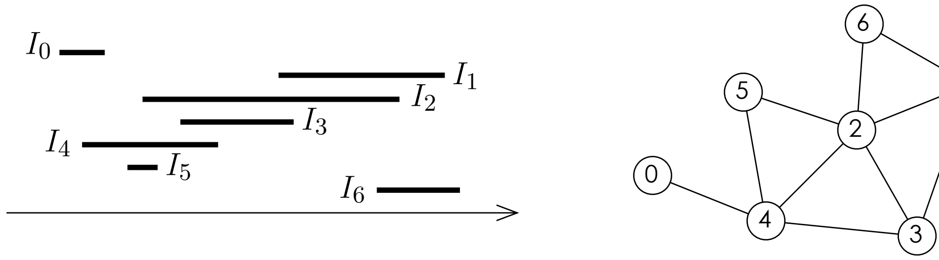
3 Graphe d'intervalles

On construit la suite de graphes (G_n) à partir des intervalles $I_0, \ldots, I_n$, où les sommets de G_n sont numérotés de 0 à n et dans lequel :

il existe une arête entre les sommets i et j, $i \neq j$, si et seulement si $I_i \cap I_j \neq \varnothing$.

G_n est appelé le *graphe d'intervalles* associés aux intervalles $I_0, \ldots, I_n$.

La structure des intervalles confère à ces graphes des propriétés algorithmiques intéressantes. Voici un exemple de graphe d'intervalles à 7 sommets avec ses intervalles associés.



Dans toute la suite du problème, il vous sera demandé de répondre aux questions pour les graphes G_n pour $n \in \{10, 20, 50, 100, 200, 500, 1\,000, 2\,500\}$.

Question 3 *Quel est le nombre d'arêtes de G_n pour* **a)** $n = 10$, **b)** $n = 20$, **c)** $n = 50$, **d)** $n = 100$, **e)** $n = 200$, **f)** $n = 500$, **g)** $n = 1\,000$ *et* **h)** $n = 2\,500$ *?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

On appelle *degré* d'un sommet i d'un graphe G, le nombre de sommets $j \neq i$ tels qu'il existe une arête entre i et j dans G.

Question 4 *Quel est le degré du sommet de plus haut degré du graphe G_n pour pour* **a)** $n = 10$, **b)** $n = 20$, **c)** $n = 50$, **d)** $n = 100$, **e)** $n = 200$, **f)** $n = 500$, **g)** $n = 1\,000$ *et* **h)** $n = 2\,500$ *?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

4 Cliques et Stables

On dit qu'un sous-ensemble de sommets $K \subseteq V$ d'un graphe $G = (V, E)$ est une *clique* s'il existe une arête entre toute paire de sommets de K, c'est-à-dire que pour tout $i, j \in K$, $i \neq j \Rightarrow \{i, j\} \in E$. La *taille* de K est le nombre de sommets de K.

On dit qu'une clique K est *maximum* s'il n'existe pas de clique K' de taille strictement supérieure à celle de K.
La recherche d'une clique maximum est très difficile en général mais se fait en temps polynomial sur les graphes d'intervalles.

Question 5 *Donnez une clique maximum pour le graphe G_{10}.*

Question 6 *Quelle est la taille d'une clique maximum pour les graphes G_n pour* **a)** $n = 10$, **b)** $n = 20$, **c)** $n = 50$, **d)** $n = 100$, **e)** $n = 200$, **f)** $n = 500$, **g)** $n = 1\,000$ *et* **h)** $n = 2\,500$ *?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

Indication. *Proposez une condition simple pour qu'un ensemble d'intervalles forme une clique. Parcourrez les intervalles suivant l'ordre défini à la section 2.*

On dit qu'un ensemble de sommets $S \subseteq V$ d'un graphe $G = (V, E)$ est un *stable* s'il n'existe aucune arête entre les sommets de S, c'est-à-dire si pour tout $u, v \in S$, $\{u, v\} \notin E$. On dit qu'un stable est *maximum* s'il n'existe pas de stable de taille plus grande.

Question 7 *Donnez un stable maximum du graphe G_{10}.*

Question 8 *Quelle est la taille d'un stable maximum du graphes G_n pour* **a)** $n = 10$, **b)** $n = 20$, **c)** $n = 50$, **d)** $n = 100$, **e)** $n = 200$, **f)** $n = 500$, **g)** $n = 1\,000$ *et* **h)** $n = 2\,500$ *?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

Indication. *L'intervalle dont l'extrémité droite est la plus à gauche appartient-il à un stable maximum ? Itérez.*

5 Connexité

On dit qu'un graphe est *connexe* s'il existe un chemin entre toute paire de sommet : c'est-à-dire, pour toute paire de sommets $i \neq j$, il existe une suite finie de sommets $i = k_0, \ldots, k_\ell = j$ telle qu'il existe une arête entre k_q et k_{q+1}, pour tout $0 \leqslant q < \ell$.

On appelle *composantes connexes* d'un graphe G, les classes d'équivalence de la relation sur les sommets *« sont reliés par un chemin »*, c'est-à-dire les ensembles de sommets connectés entre eux par des chemins dans G.

Question 9 *Donnez le nombre de composantes connexes et la taille de la plus grande composante connexe des graphes G_n pour les valeurs de n suivantes :* **a)** $n = 10$, **b)** $n = 20$, **c)** $n = 50$, **d)** $n = 100$, **e)** $n = 200$, **f)** $n = 500$, **g)** $n = 1\,000$ *et* **h)** $n = 2\,500$.

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

6 Dominants

Un sous-ensemble $D \subseteq V$ de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est un *dominant* si pour tout sommet $u \in V$, $u \in D$ ou il existe un sommet $v \in D$ tel que $\{u, v\} \in E$, c'est-à-dire si tout sommet est dans ou est voisin d'un sommet du dominant. On dit qu'un dominant est *minimum* s'il n'existe pas de dominant de taille inférieure.

Question 10 *Donnez un dominant minimum pour le graphe G_{15}.*

Question 11 *Quelles sont les tailles des dominants minimum pour les graphes G_n suivant :* ***a)*** $n = 10$, ***b)*** $n = 20$, ***c)*** $n = 50$, ***d)*** $n = 100$, ***e)*** $n = 200$, ***f)*** $n = 500$, ***g)*** $n = 1\,000$ *et* ***h)*** $n = 2\,500$ *?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

Indication. *Soit I l'intervalle dont l'extrémité droite est la plus à gauche. L'intervalle qui intersecte I et dont l'extrémité droite est la plus à droite appartient-il à un dominant minimum ?*

7 Une application des graphes d'intervalles

L'institut Pasteur doit stocker différents vaccins $\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_n$ dans des réfrigérateurs. Le vaccin $\mathcal{V}_i$ doit être conservé à une température (normalisée entre 0 et 1) comprise dans l'intervalle I_i. Chaque réfrigérateur devra être réglé à une température précise. Il s'agit pour l'institut de stocker les vaccins dans un nombre minimum de réfrigérateurs.

Question 12 ***a)*** *Quel est le nombre minimum de réfrigérateurs pour $n = 10$?* ***b)*** *À quelles températures réglez-vous ces réfrigérateurs ? (On donnera les 5 premières décimales après la virgule)*

Question 13 *Quel est le nombre minimum de réfrigérateurs pour les valeurs de n suivantes :* ***a)*** $n = 10$, ***b)*** $n = 20$, ***c)*** $n = 50$, ***d)*** $n = 100$, ***e)*** $n = 200$, ***f)*** $n = 500$, ***g)*** $n = 1\,000$ *et* ***h)*** $n = 2\,500$ *?*

★ *Vous présenterez à l'oral l'algorithme que vous avez utilisé, ainsi que sa complexité.*

Indication. *Que peut-on dire des vaccins qui sont placés dans un même réfrigérateur ? Considérez, dans le graphe d'intervalle associé, la clique taille maximum qui contient l'intervalle de température dont l'extrémité droite est la plus à gauche.*

Graphes d'intervalles

Nom, prénom, u_0: ....

Question 1

a)

b)

c)

d)

Question 2

a)

b)

c)

d)

e)

Question 3

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

Question 4

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

Question 5

Question 6

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

Question 7

Question 8

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

Question 9

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

Question 10

Question 11

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

Question 12

a)

b)

Question 13

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)